MECÂNICA DOS MATERIAIS

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek

QUINTA EDIÇÃO

Mc Graw Hill

bookman

Sumário

1
INTRODUÇÃO — O CONCEITO DE TENSÃO
21

1.1 Introdução 22
1.2 Um breve exame dos métodos da estática 22
1.3 Tensões nos elementos de uma estrutura 25
1.4 Análise e projeto 26
1.5 Carga axial e tensão normal 27
1.6 Tensão de cisalhamento 29
1.7 Tensão de esmagamento em conexões 31
1.8 Aplicação à análise e projeto de estruturas simples 32
1.9 Método de solução do problema 34
1.10 Precisão numérica 35
1.11 Tensão em um plano oblíquo sob carregamento axial 43
1.12 Tensão sob condições gerais de carregamento; componentes de tensão 44
1.13 Considerações de projeto 47
Revisão e resumo do Capítulo 1 58

2
TENSÃO E DEFORMAÇÃO — CARREGAMENTO AXIAL
66

2.1 Introdução 67
2.2 Deformação específica normal sob carregamento axial 68
2.3 Diagrama tensão-deformação 70
*2.4 Tensões e deformações específicas verdadeiras 75
2.5 Lei de Hooke; módulo de elasticidade 76
2.6 Comportamento elástico e comportamento plástico de um material 77
2.7 Carregamentos repetidos; fadiga 79

2.8 Deformações de elementos sob carregamento axial 81
2.9 Problemas estaticamente indeterminados 90
2.10 Problemas que envolvem mudanças de temperatura 94
2.11 Coeficiente de Poisson 104
2.12 Carregamento multiaxial; lei de Hooke generalizada 105
*2.13 Dilatação; módulo de compressibilidade volumétrica 107
2.14 Deformação de cisalhamento 109
2.15 Outras discussões sobre deformação sob carregamento axial; relação entre E, ν e G 112
*2.16 Relações de tensão-deformação para materiais compósitos reforçados com fibras 115
2.17 Distribuição de tensão e deformação específica sob carregamento axial; princípio de Saint-Venant 124
2.18 Concentrações de tensão 127
2.19 Deformações plásticas 129
*2.20 Tensões residuais 133
Revisão e resumo do Capítulo 2 141

3
TORÇÃO
151

3.1 Introdução 152
3.2 Discussão preliminar das tensões em uma barra de seção circular 154
3.3 Deformações em uma barra de seção circular 156
3.4 Tensões no regime elástico 159
3.5 Ângulo de torção no regime elástico 170
3.6 Eixos estaticamente indeterminados 173
3.7 Projeto de eixos de transmissão 185
3.8 Concentração de tensões em eixos circulares 187
*3.9 Deformações plásticas em eixos circulares 192
*3.10 Eixos circulares feitos de um material elastoplástico 194
*3.11 Tensão residual em eixos circulares 197
*3.12 Torção de elementos de seção não circular 206
*3.13 Eixos vazados de paredes finas 209
Revisão e resumo do Capítulo 3 218

4
FLEXÃO PURA
228

4.1 Introdução 229
4.2 Barra simétrica em flexão pura 231
4.3 Deformações em uma barra de seção simétrica em flexão pura 233
4.4 Tensões e deformações no regime elástico 236
4.5 Deformações em uma seção transversal 240
4.6 Flexão de barras constituídas de vários materiais 250
4.7 Concentrações de tensão 254
*4.8 Deformações plásticas 263

*4.9 Barras constituídas de material elastoplástico 266
*4.10 Deformações plásticas de barras com um único plano de simetria 270
*4.11 Tensões residuais 270
4.12 Carregamento axial excêntrico em um plano de simetria 280
4.13 Flexão assimétrica 290
4.14 Caso geral de carregamento axial excêntrico 296
*4.15 Flexão de barras curvas 305
Revisão e resumo do Capítulo 4 318

5
ANÁLISE E PROJETOS DE VIGAS EM FLEXÃO
327

5.1 Introdução 328
5.2 Diagramas de força cortante e momento fletor 331
5.3 Relações entre força, força cortante e momento fletor 342
5.4 Projeto de vigas prismáticas em flexão 352
*5.5 Usando funções de singularidade para determinar força cortante e momento fletor em uma viga 363
*5.6 Vigas não prismáticas 374
Revisão e resumo do Capítulo 5 383

6
TENSÕES DE CISALHAMENTO EM VIGAS E BARRAS DE PAREDES FINAS
391

6.1 Introdução 392
6.2 Força cortante na face horizontal de um elemento de viga 394
6.3 Determinação das tensões de cisalhamento em uma viga 396
6.4 Tensões de cisalhamento τ_{xy} em tipos comuns de vigas 397
*6.5 Discussões adicionais sobre distribuição de tensões em uma viga retangular estreita 400
6.6 Cisalhamento longitudinal em um elemento de viga de modo arbitrário 408
6.7 Tensões de cisalhamento em barras de paredes finas 410
*6.8 Deformações plásticas 412
*6.9 Carregamento assimétrico em barras de paredes finas; centro de cisalhamento 422
Revisão e resumo do Capítulo 6 434

7
TRANSFORMAÇÕES DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO
442

7.1 Introdução 443
7.2 Transformação do estado plano de tensão 445
7.3 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima 448
7.4 Círculo de Mohr para o estado plano de tensão 456

7.5 Estado geral de tensão 466
7.6 Aplicação do círculo de Mohr na análise tridimensional da tensão 468
*7.7 Critérios de escoamento para materiais dúcteis em estado plano de tensão 471
*7.8 Critério de fratura para materiais frágeis em estado plano de tensão 473
7.9 Tensões em vasos de pressão de paredes finas 482
*7.10 Transformação do estado plano de deformação 490
*7.11 Círculo de Mohr para o estado plano de deformação 493
*7.12 Análise tridimensional de deformação 495
*7.13 Medidas de deformação específica e rosetas de deformação 498
Revisão e resumo do Capítulo 7 506

8
TENSÕES PRINCIPAIS SOB DETERMINADO CARREGAMENTO 515

*8.1 Introdução 516
*8.2 Tensões principais em uma viga 517
*8.3 Projeto de eixos de transmissão 520
*8.4 Tensões sob carregamentos combinados 528
Revisão e resumo do Capítulo 8 541

9
DEFLEXÃO DE VIGAS 549

9.1 Introdução 550
9.2 Deformação de uma viga sob carregamento transversal 552
9.3 Equação da linha elástica 553
*9.4 Determinação direta da linha elástica com base na força distribuída 558
9.5 Vigas estaticamente indeterminadas 560
*9.6 Utilizando funções de singularidade para determinar a inclinação e a deflexão de uma viga 569
9.7 Método da superposição 578
9.8 Aplicação da superposição para vigas estaticamente indeterminadas 580
*9.9 Teoremas do momento de área 589
*9.10 Aplicação em vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos 591
*9.11 Diagramas de momento fletor por partes 593
*9.12 Aplicação dos teoremas do momento de área às vigas com carregamentos assimétricos 602
*9.13 Deflexão máxima 604
*9.14 Aplicação dos teoremas de momento de área em vigas estaticamente indeterminadas 606
Revisão e resumo do Capítulo 9 614

10
COLUNAS
626

10.1 Introdução 627
10.2 Estabilidade de estruturas 628
10.3 Fórmula de Euler para colunas biarticuladas 630
10.4 Extensão da fórmula de Euler para colunas com outras condições de extremidade 634
*10.5 Carregamento excêntrico e fórmula da secante 645
10.6 Projeto de colunas submetidas a uma força centrada 656
10.7 Projeto de colunas submetidas a uma força excêntrica 672
Revisão e resumo do Capítulo 10 682

11
MÉTODOS DE ENERGIA
689

11.1 Introdução 690
11.2 Energia de deformação 690
11.3 Densidade de energia de deformação 692
11.4 Energia de deformação elástica para tensões normais 694
11.5 Energia de deformação elástica para tensões de cisalhamento 697
11.6 Energia de deformação para um estado geral de tensão 700
11.7 Carregamento por impacto 713
11.8 Projeto para carregamento por impacto 715
11.9 Trabalho e energia em razão de uma única carga 716
11.10 Deformação provocada por uma única carga pelo método do trabalho e da energia 718
*11.11 Trabalho e energia devido a várias cargas 729
*11.12 Teorema de Castigliano 731
*11.13 Deflexões pelo teorema de Castigliano 732
*11.14 Estruturas estaticamente indeterminadas 736
Revisão e resumo do Capítulo 11 746

APÊNDICES
755

A Momentos de áreas 756
B Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia 766
C Propriedades de perfis de aço laminado 768
D Deflexões e inclinações de vigas 774

Crédito de fotos 775

Respostas aos problemas 777

Índice 789

Lista de Símbolos

a Constante; distância
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ Forças; reações
$A, B, C, \ldots$ Pontos
$A, \mathcal{A}$ Área
b Distância; largura
c Constante; distância; raio
C Centroide
$C_1, C_2, \ldots$ Constantes de integração
C_P Coeficiente de estabilidade da coluna
d Distância; diâmetro; altura
D Diâmetro
e Distância; excentricidade; dilatação
E Módulo de elasticidade
f Frequência; função
$\mathbf{F}$ Força
$F.S.$ Coeficiente de segurança
G Módulo de rigidez; módulo de elasticidade transversal
h Altura; distância
$\mathbf{H}$ Força
H, J, K Pontos
$I, I_x, \ldots$ Momentos de inércia
$I_{xy}, \ldots$ Produtos de inércia
J Momento polar de inércia
k Constante de mola; fator de forma; módulo de compressibilidade volumétrica; constante
K Coeficiente de concentração de tensão; constante de mola de torção
l Comprimento; vão
L Comprimento; vão
L_e Comprimento efetivo
m Massa
$\mathbf{M}$ Conjugado, momento
$M, M_x, \ldots$ Momento fletor
M_D Momento fletor, carga permanente (LRFD)
M_L Momento fletor, carga externa (LRFD)
M_U Momento fletor, limite de carga (LRFD)
n Número; relação de módulos de elasticidade; direção normal
p Pressão
$\mathbf{P}$ Força; carga concentrada
P_D Carga permanente (LRFD)
P_L Carga externa (LRFD)
P_U Limite de carga (LRFD)
q Força de cisalhamento por unidade de comprimento; fluxo de cisalhamento
$\mathbf{Q}$ Força
Q Momento estático
r Raio; raio de giração
$\mathbf{R}$ Força; reação
R Raio; módulo de ruptura
s Comprimento
t Espessura; distância; desvio tangencial
$\mathbf{T}$ Torque
T Temperatura
u, v Coordenadas retangulares
u Densidade de energia de deformação
U Energia de deformação; trabalho
$\mathbf{v}$ Velocidade
$\mathbf{V}$ Força cortante
V Volume; cisalhamento
w Largura; distância; força por unidade de comprimento
$\mathbf{W}, W$ Peso; força; carga; módulo de resistência à flexão
x, y, z Coordenadas retangulares; distância; deslocamentos; deflexão
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ Coordenadas do centroide
Z Módulo de resistência à flexão
α, β, γ Ângulos
α Coeficiente de expansão térmica; coeficiente de influência
γ Deformação de cisalhamento; peso específico
γ_D Coeficiente de carga, carga permanente (LRFD)
γ_L Coeficiente de carga, carga externa (LRFD)
δ Deformação; deslocamento
ϵ Deformação específica normal
θ Ângulo; inclinação
λ Cosseno diretor
ν Coeficiente de Poisson
ρ Raio de curvatura; distância; densidade
σ Tensão normal
τ Tensão de cisalhamento
ϕ Ângulo; ângulo de torção ou de rotação; coeficiente de resistência
ω Velocidade angular

C A P Í T U L O

1

Introdução — O conceito de tensão

Este capítulo é dedicado ao estudo das tensões que ocorrem em muitos dos elementos contidos nesta escavadeira, como, por exemplo, elementos de barra, eixos, parafusos e pinos.

1.1. Introdução

O principal objetivo do estudo da mecânica dos materiais é proporcionar ao futuro engenheiro os meios para analisar e projetar várias máquinas e estruturas portadoras de carga.

Tanto a análise quanto o projeto de uma dada estrutura envolvem a determinação das *tensões* e *deformações*. Este primeiro capítulo é dedicado ao conceito de *tensão*.

A Seção 1.2 apresenta um rápido exame dos métodos básicos da estática e sua aplicação na determinação das forças nos elementos conectados por pinos que formam uma estrutura simples. A Seção 1.3 apresentará o conceito de *tensão* em um elemento estrutural e mostrará como essa tensão pode ser determinada a partir da *força* nesse elemento. Após uma breve discussão da análise e projeto de engenharia (Seção 1.4), você estudará sucessivamente as *tensões normais* em uma barra sob carga axial (Seção 1.5), as *tensões de cisalhamento* originadas pela aplicação de forças transversais equivalentes e opostas (Seção 1.6) e as *tensões de esmagamento* criadas por parafusos e pinos em barras por eles conectadas (Seção 1.7). Esses vários conceitos serão aplicados na Seção 1.8 para a determinação das tensões nas barras de estrutura simples considerada anteriormente na Seção 1.2.

A primeira parte do capítulo termina com uma descrição do método que você deverá utilizar na solução de determinado problema (Seção 1.9) e com uma discussão da precisão numérica apropriada aos cálculos de engenharia (Seção 1.10).

Na Seção 1.11, examinaremos novamente um elemento de barra sob carga axial, será observado que as tensões em um plano *oblíquo* incluem as componente *de tensões normal e de cisalhamento*, ao passo que na Seção 1.12 você notará que são necessários *seis componentes* para descrever o estado de tensão em um ponto de um corpo, sob as condições mais generalizadas de carga.

Finalmente, a Seção 1.13 será dedicada à determinação do limite de resistência de um material através de ensaios de corpos de prova e a seleção de *coeficiente de segurança* aplicados ao cálculo da *carga admissível* de um componente estrutural feito com esse material.

1.2. Um breve exame dos métodos da estática

Nesta seção você examinará os métodos básicos da estática enquanto determina as forças nos elementos de uma estrutura simples.

Considere a estrutura mostrada na Fig. 1.1, projetada para suportar uma carga de 30 kN. Ela consiste em uma barra AB com uma seção transversal retangular de 30×50 mm e uma barra BC com uma seção transversal circular com diâmetro de 20 mm. As duas barras estão conectadas por um pino em B e são suportadas por pinos e suportes em A e C, respectivamente. Nosso primeiro passo será desenhar um *diagrama de corpo livre* da estrutura, separando-a de seus suportes em A e C e mostrando as reações que esses suportes exercem na estrutura (Fig. 1.2). Note que o croqui da estrutura foi simplificado omitindo-se todos os detalhes desnecessários. Muitos de vocês devem ter reconhecido neste ponto que AB e BC são *barras simples*. Para aqueles que não perceberam, vamos proceder à nossa análise, ignorando esse fato e assumindo que as direções

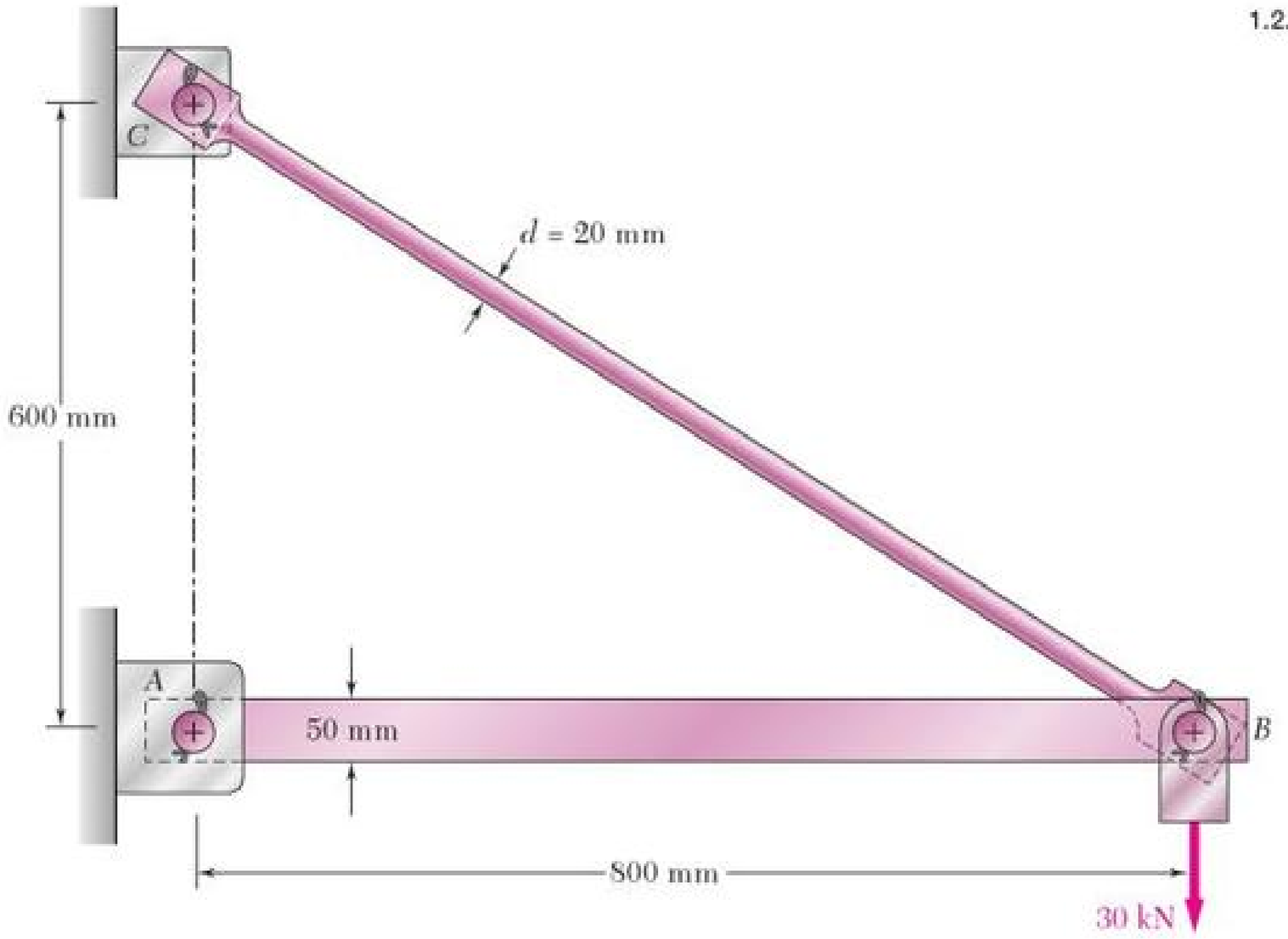


Fig. 1.1

das reações em A e C são desconhecidas. Cada uma dessas reações, portanto, será representada por duas componentes: $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$, em A, e $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$, em C.

Escrevemos as três equações de equilíbrio a seguir:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad A_x(0{,}6\text{ m}) - (30\text{ kN})(0{,}8\text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40\text{ kN} \tag{1.1}$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0: \qquad A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \qquad C_x = -40\text{ kN} \tag{1.2}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y + C_y - 30\text{ kN} = 0$$

$$A_y + C_y = +30\text{ kN} \tag{1.3}$$

Encontramos duas das quatro incógnitas, mas não podemos determinar as outras duas a partir dessas equações e tampouco obter uma equação independente adicional a partir do diagrama de corpo livre da estrutura. Precisamos agora desmembrar a estrutura. Considerando o diagrama de corpo livre da barra AB (Fig. 1.3), temos a seguinte equação de equilíbrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad -A_y(0{,}8\text{ m}) = 0 \qquad A_y = 0 \tag{1.4}$$

Substituindo A_y de (1.4) em (1.3), obtemos $C_y = +30$ kN. Expressando os resultados obtidos para as reações em A e C na forma vetorial, temos

$$\mathbf{A} = 40\text{ kN}\rightarrow \qquad \mathbf{C}_x = 40\text{ kN}\leftarrow, \mathbf{C}_y = 30\text{ kN}\uparrow$$

Notamos que a reação em A é dirigida ao longo do eixo da barra AB e provoca compressão nessa barra. Observando que as componentes C_x e C_y da reação em C são, respectivamente, proporcionais às componentes horizontal e vertical da distância de B a C, concluímos que a reação em C é igual a 50 kN e dirigida ao longo do eixo da barra BC, provocando tração nessa barra.

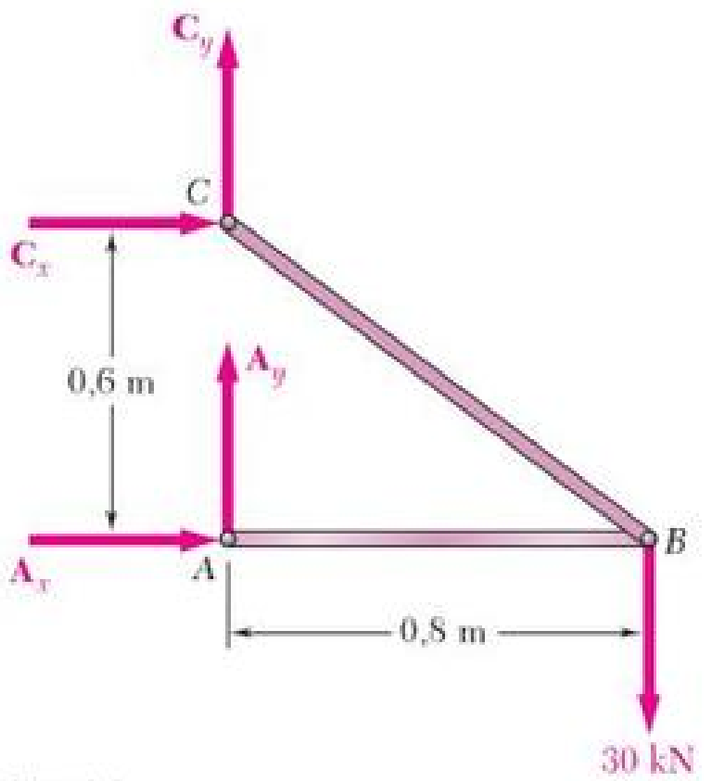


Fig. 1.2

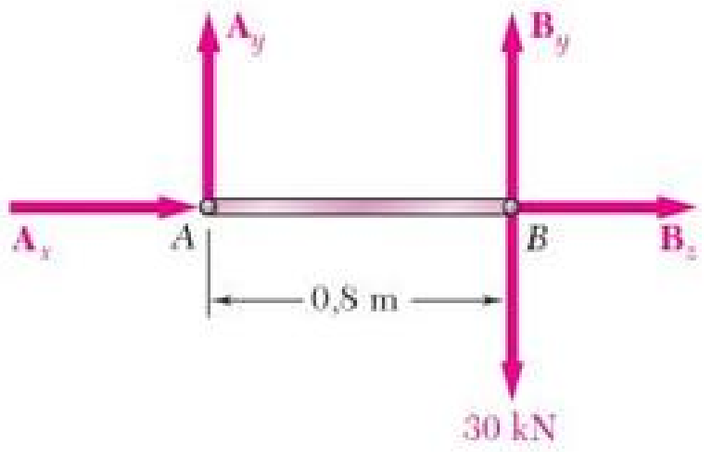


Fig. 1.3

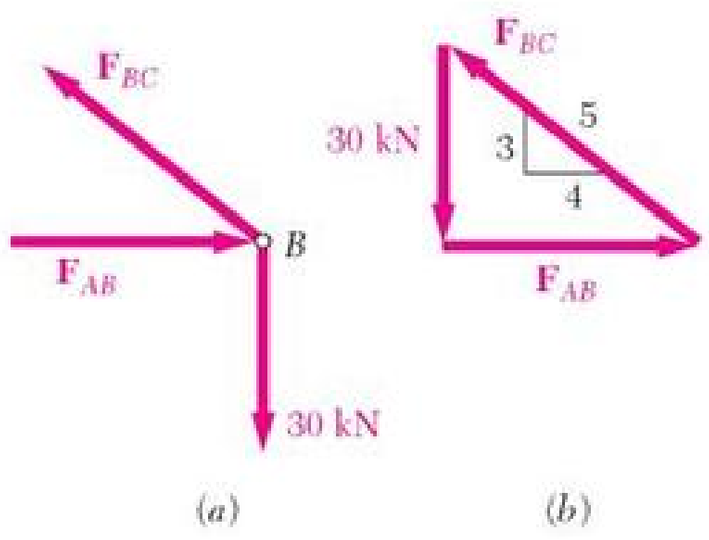


Fig. 1.4

Esses resultados poderiam ter sido previstos reconhecendo que AB e BC são barras simples, ou seja, elementos submetidos apenas a forças em dois pontos, sendo esses dois pontos A e B para a barra AB, e B e C para a barra BC. Sem dúvida, para uma barra simples, as linhas de ação das resultantes das forças agindo em cada um dos dois pontos são iguais e opostas e passam através de ambos os pontos. Utilizando essa propriedade, poderíamos ter obtido uma solução mais simples considerando o diagrama de corpo livre do pino B. As forças no pino B são as forças $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{BC}$ exercidas, respectivamente, pelas barras AB e BC e a carga de 30 kN (Fig. 1.4*a*). Podemos expressar que o pino B está em equilíbrio e desenhar o triângulo de forças correspondente (Fig. 1.4*b*).

Como a força $\mathbf{F}_{BC}$ está dirigida ao longo da barra BC, sua inclinação é a mesma de BC, ou seja, 3/4. Então temos a proporção

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

da qual obtemos

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \qquad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

As forças $\mathbf{F'}_{AB}$ e $\mathbf{F'}_{BC}$ exercidas pelo pino B, respectivamente, na barra AB e haste BC são iguais e opostas a $\mathbf{F}_{AB}$ e $\mathbf{F}_{BC}$ (Fig. 1.5).

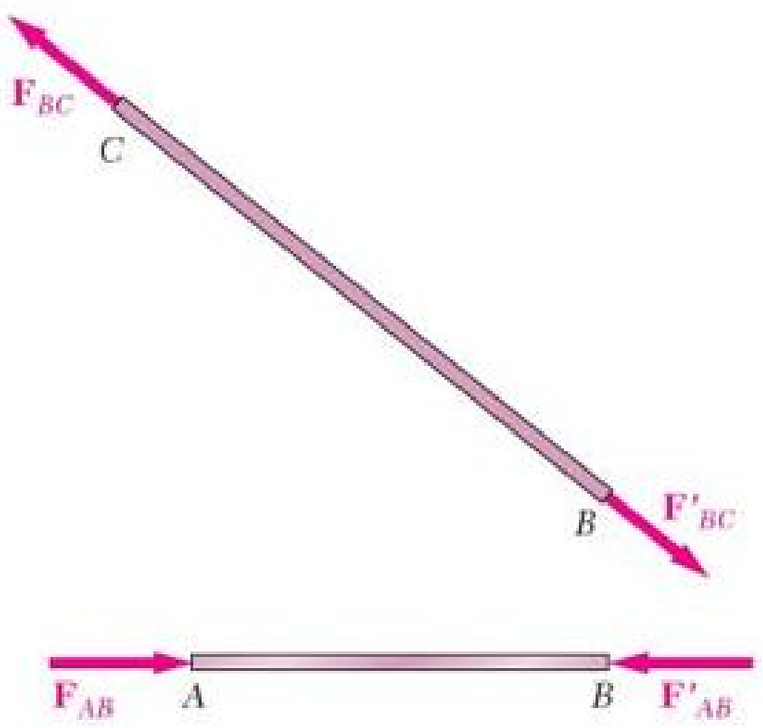


Fig. 1.5

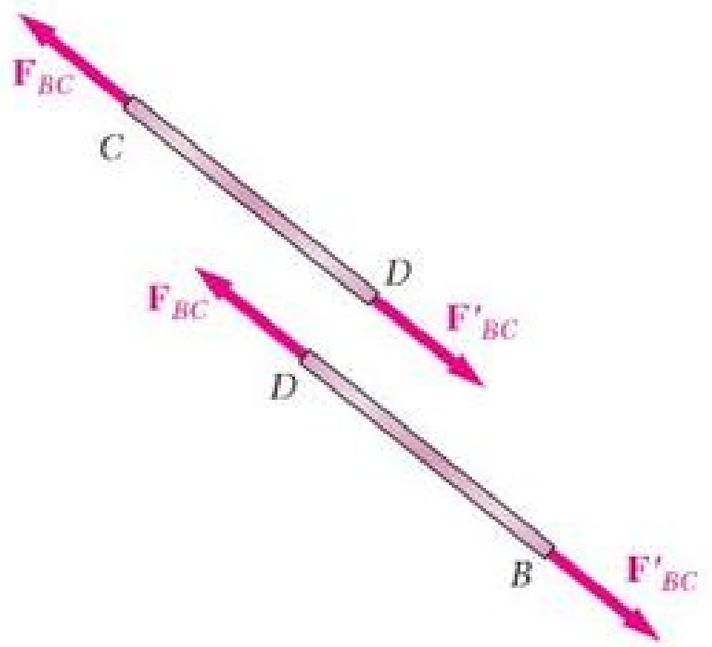


Fig. 1.6

Conhecendo as forças nas extremidades de cada um dos elementos, podemos agora determinar suas forças internas. Cortando a barra BC em algum ponto arbitrário D, obtemos duas partes *BD* e *CD* (Fig. 1.6). Para restaurar o equilíbrio das partes BD e CD separadamente, quando em B aplica-se uma carga externa de 30 kN, é necessário que na seção em D exista uma força interna de 50 kN. Verificamos ainda, pelas direções das forças $\mathbf{F}_{BC}$ e $\mathbf{F'}_{BC}$ na Fig. 1.6, que a barra está sob tração. Um procedimento similar nos permitiria determinar que a força interna na barra AB é 40 kN e que a barra está sob compressão.

1.3. Tensões nos elementos de uma estrutura

Embora os resultados obtidos na seção anterior representem uma primeira e necessária etapa na análise da estrutura apresentada, eles não nos dizem se aquela carga pode ser suportada com segurança. Se a barra BC, por exemplo, vai se quebrar ou não sob essa carga, depende não somente do valor encontrado para a força interna F_{BC}, mas também da área da seção transversal da barra e do material do qual ela é feita. Sem dúvida, a força interna F_{BC} realmente representa a resultante das forças elementares distribuídas sobre toda a área A da seção transversal (Fig. 1.7), e a intensidade média dessas forças distribuídas é igual à força por unidade de área, F_{BC}/A, na seção. Se a barra vai ou não se quebrar sob o efeito dessa carga, depende da capacidade do material em resistir ao valor correspondente F_{BC}/A da intensidade das forças internas distribuídas. Tudo depende então da força F_{BC}, da área A da seção transversal e do material da barra.

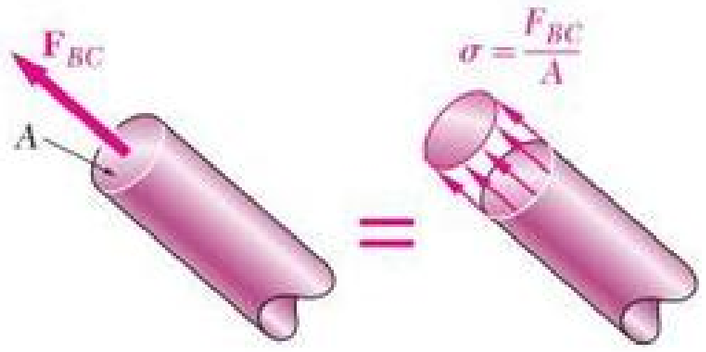


Fig. 1.7

A força por unidade de área, ou intensidade das forças distribuídas sobre uma determinada seção, é chamada de *tensão* naquela seção e é representada pela letra grega σ (sigma). A tensão na seção transversal de área A de uma barra submetida a uma carga axial **P** (Fig. 1.8), é obtida dividindo-se o valor da carga P pela área A:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

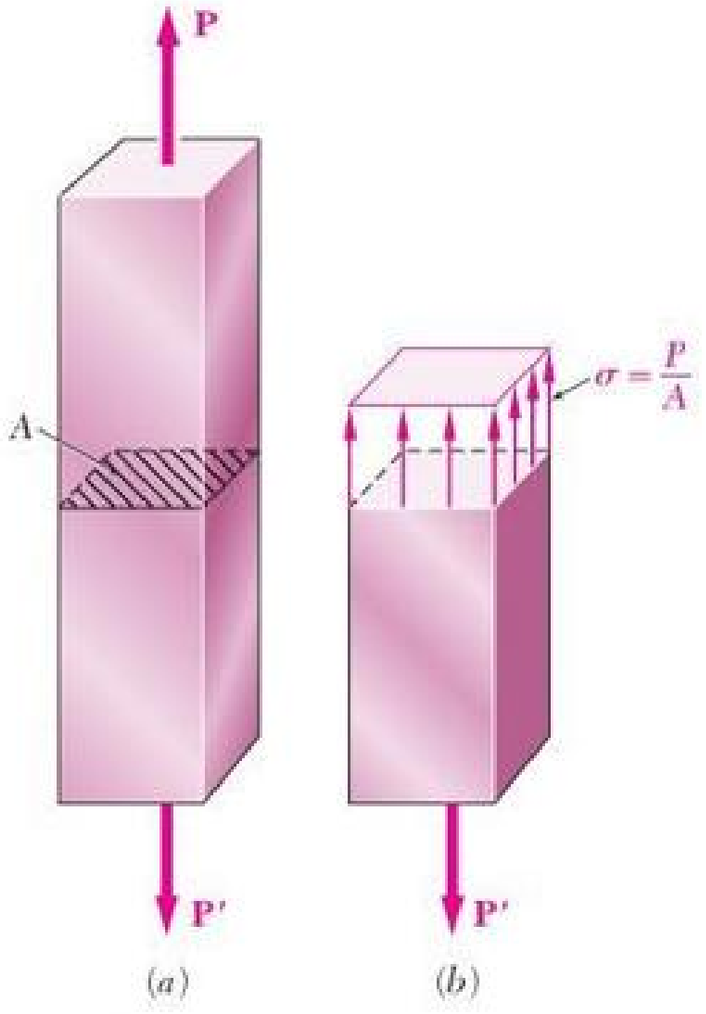


Fig. 1.8

Será utilizado um sinal positivo para indicar uma tensão de tração (barra tracionada) e um sinal negativo para indicar tensão de compressão (barra comprimida).

Como nessa discussão são utilizadas as unidades métricas do Sistema Internacional (SI), com P expressa em newtons (N) e A, em metros quadrados (m^2), a tensão σ será expressa em N/m^2. Essa unidade é chamada de *pascal* (Pa). No entanto, considerando-se que o pascal é um valor extremamente pequeno, na prática, deverão ser utilizados múltiplos dessa unidade, ou seja, o quilopascal (kPa), o megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa). Temos

$$1\ \text{kPa} = 10^3\ \text{Pa} = 10^3\ \text{N/m}^2$$

$$1\ \text{MPa} = 10^6\ \text{Pa} = 10^6\ \text{N/m}^2$$

$$1\ \text{GPa} = 10^9\ \text{Pa} = 10^9\ \text{N/m}^2$$

Quando são utilizadas as unidades inglesas, a força P geralmente é expressa em libras (lb) ou quilolibras (kip) e a área da seção transversal A em polegadas quadradas (in^2). A tensão σ será então expressa em libras por polegada quadrada (psi) ou quilolibras por polegada quadrada (ksi).

1.4. Análise e projeto

Considerando novamente a estrutura da Fig. 1.1, vamos supor que a barra BC seja feita de aço com uma tensão máxima admissível $\sigma_{adm} = 165$ MPa. A barra BC pode suportar com segurança a carga à qual ela está submetida? O valor da força F_{BC} na barra já foi calculada como 50 kN. Lembrando que o diâmetro da haste é 20 mm, utilizamos a Equação (1.5) para determinar a tensão criada na haste pela carga. Temos

$$P = F_{BC} = +50\text{ kN} = +50 \times 10^3\text{ N}$$

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{20\text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(10 \times 10^{-3}\text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3\text{ N}}{314 \times 10^{-6}\text{ m}^2} = +159 \times 10^6\text{ Pa} = +159\text{ MPa}$$

Como o valor obtido para σ é menor que o valor da tensão admissível do aço utilizado σ_{adm}, concluímos que a barra BC pode suportar com segurança a carga à qual ela está submetida. Para completar, nossa análise daquela estrutura também deverá incluir a determinação da tensão de compressão na barra AB, bem como uma investigação das tensões produzidas nos pinos e seus mancais. Isso será discutido mais adiante neste capítulo. Deveremos determinar também se as deformações produzidas pela carga são aceitáveis. O estudo das deformações sob cargas axiais será discutido no Capitulo 2. Uma consideração adicional necessária para elementos comprimidos envolve sua *estabilidade*, ou seja, sua capacidade para suportar uma dada carga sem apresentar mudança brusca de configuração. Isso será discutido no Capítulo 10.

O papel do engenheiro não se limita à análise das estruturas e das máquinas existentes sujeitas a uma determinada condição de carga. Mais importante ainda para o engenheiro é o *projeto* de novas estruturas e máquinas, o que implica a seleção dos componentes aptos a executar cada função específica. Como exemplo de projeto, vamos voltar à estrutura da Fig. 1.1 e supor que será utilizado o alumínio, que tem uma tensão admissível $\sigma_{adm} = 100$ MPa. Como a força na barra BC ainda será $P = F_{BC} = 50$ kN sob a carga dada, devemos ter então, da Equação (1.5),

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{50 \times 10^3\text{ N}}{100 \times 10^6\text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

e, como $A = \pi r^2$,

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6}\text{ m}^2}{\pi}} = 12{,}62 \times 10^{-3}\text{ m} = 12{,}62\text{ mm}$$

$$d = 2r = 25{,}2\text{ mm}$$

Concluímos que uma barra de alumínio com 26 mm ou mais de diâmetro será adequada.

1.5. Carga axial e tensão normal

Conforme indicamos, a barra BC do exemplo considerado na seção anterior é uma barra simples e, portanto, as forças $\mathbf{F}_{BC}$ e $\mathbf{F}'_{BC}$ que atuam em suas extremidades B e C (Fig. 1.5) estão dirigidas ao longo do eixo da barra BC. Dizemos que a barra está sob *carga axial*. Um exemplo real de estrutura formada por barras sob carga axial é a ponte em treliça mostrada na Fig. 1.9.

Fig. 1.9 Essa ponte em treliça consiste em barras simples que podem estar sob tração ou compressão.

Retornando à barra BC da Fig. 1.5, lembramos que o corte que traçamos através da seção D da barra para determinar sua força interna e a tensão correspondente era perpendicular ao eixo da barra; a força interna era, portanto, normal ao plano da seção (Fig. 1.7) e a tensão correspondente é descrita como *tensão normal*. Assim, a Fórmula (1.5) nos dá a *tensão normal em um elemento sob carga axial*:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

Devemos notar também que, na Fórmula (1.5), σ é obtido dividindo-se a intensidade P da resultante das forças internas distribuídas sobre a seção transversal pela área A da seção transversal; ela (a tensão σ) representa, portanto, o *valor médio* da tensão sobre a seção transversal e não a tensão em um ponto específico da seção transversal.

Para definirmos a tensão em um determinado ponto Q da seção transversal, devemos considerar uma pequena área ΔA (Fig. 1.10). Dividindo a intensidade de $\Delta\mathbf{F}$ por ΔA, obtemos o valor médio da tensão sobre ΔA. Fazendo ΔA aproximar-se de zero, obtemos a tensão no ponto Q:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

Fig. 1.10

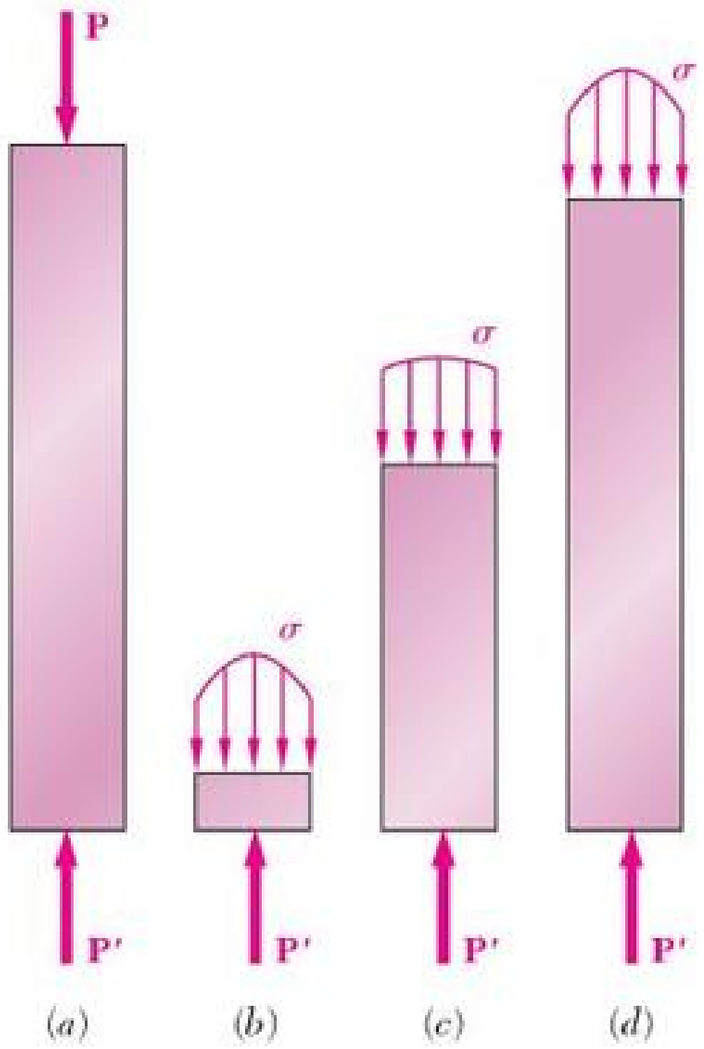


Fig. 1.11

Em geral, o valor obtido para a tensão σ em um determinado ponto Q da seção é diferente do valor da tensão média determinada pela Fórmula (1.5) e encontra-se que σ varia através da seção. Em uma barra esbelta submetida a cargas concentradas **P** e **P**′ iguais e de sentidos opostos (Fig. 1.11*a*), essa variação é pequena em uma seção distante dos pontos de aplicação das cargas concentradas (Fig. 1.11*c*), mas é bastante significativa nas vizinhanças desses pontos (Fig. 1.11*b* e *d*).

Pela Equação (1.6), vê-se que a intensidade da resultante das forças internas distribuídas é

$$\int dF = \int_A \sigma \, dA$$

Mas as condições de equilíbrio de cada uma das partes da barra mostrada na Fig. 1.11 exigem que essa intensidade seja igual à intensidade P das cargas concentradas. Temos, portanto,

$$P = \int dF = \int_A \sigma \, dA \tag{1.7}$$

o que significa que a resultante sob cada uma das superfícies de tensão na Fig. 1.11 deve ser igual à intensidade P das cargas. Essa, no entanto, é a única informação que a estática nos fornece, relativamente à distribuição das tensões normais nas várias seções da barra. A distribuição real das tensões em uma determinada seção é *estaticamente indeterminada*. Para saber mais sobre essa distribuição, é necessário considerar as deformações resultantes do modo particular de aplicação das cargas nas extremidades da barra. Isso será discutido no Capítulo 2.

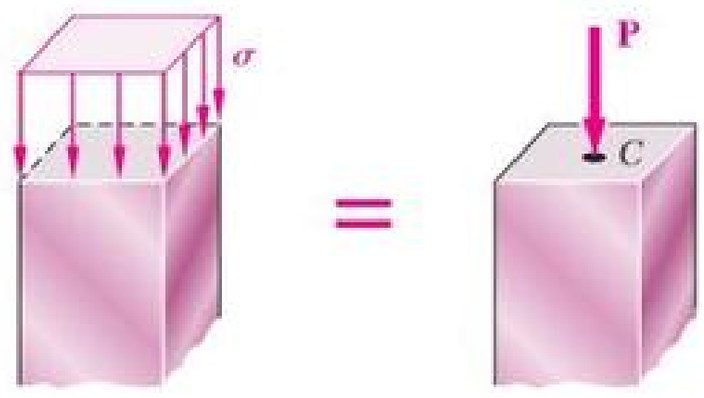


Fig. 1.12

Na prática, consideraremos que a distribuição das tensões normais em uma barra sob carga axial é uniforme, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das cargas. O valor σ da tensão é então igual a $\sigma_{méd}$ e pode ser obtido pela Fórmula (1.5). No entanto, devemos perceber que, quando assumimos uma distribuição uniforme das tensões na seção, ou seja, quando assumimos que as forças internas estão distribuídas uniformemente através da seção, segue-se da estática elementar† que a resultante **P** das forças internas deve ser aplicada no centroide C da seção (Fig. 1.12). Isso significa que *uma distribuição uniforme da tensão é possível somente se a linha de ação das cargas concentradas* **P** *e* **P**′ *passar através do centroide da seção considerada* (Fig. 1.13). Esse tipo de carregamento é chamado de *carga centrada* e consideraremos que ele ocorre em todos os elementos de barra retos, encontrados em treliças e estruturas, conectados por pinos, como aquela da Fig. 1.1. No entanto, se um elemento de barra estiver carregado axialmente por uma carga excêntrica como mostra a Fig. 1.14*a*, percebemos, pelas condições de equilíbrio da parte da barra mostrada na Fig. 1.14*b*, que as forças internas em uma determinada seção devem ser equivalentes a uma força **P**

†Ver BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JR., E. Russell. *Resistência dos Materiais*. 4. ed. McGraw-Hill: Nova York, 1987, ou, também dos mesmos autores, *Mecânica Vetorial para Engenheiros*. 6. ed. McGraw-Hill: São Paulo, 2006.

Fig. 1.13

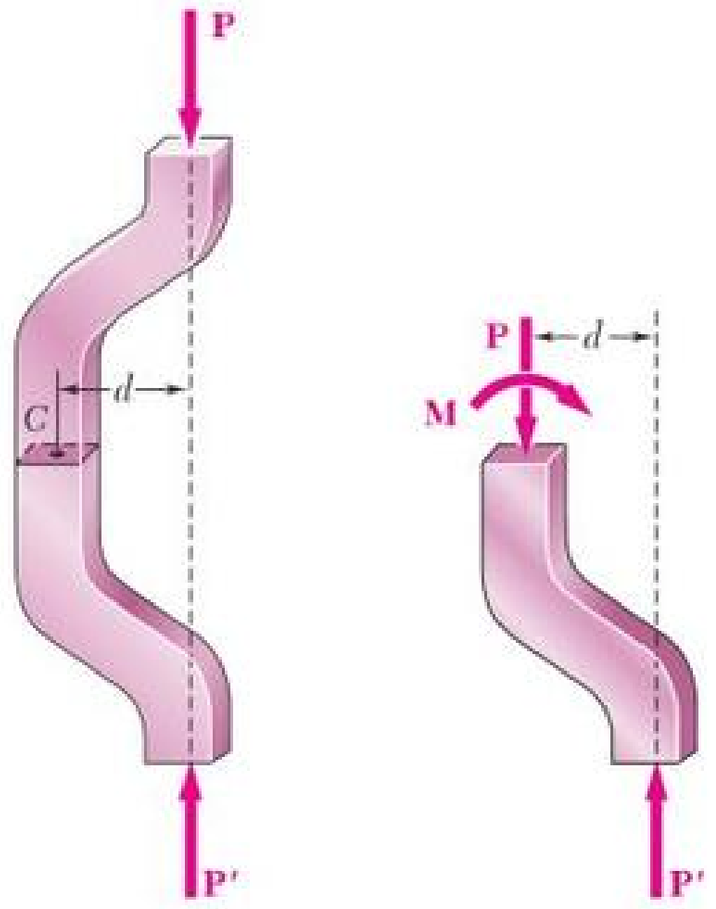


Fig. 1.14

aplicada no centroide da seção e um conjugado **M**, cuja intensidade é dada pelo momento $M = Pd$. A distribuição das forças, bem como a distribuição correspondente das tensões, *não pode ser uniforme*. Assim como a distribuição de tensões não pode ser simétrica como mostra a Fig. 1.11. Esse caso será discutido detalhadamente no Capítulo 4.

1.6. Tensão de cisalhamento

As forças internas e as tensões correspondentes discutidas nas Seções 1.2 e 1.3 eram normais à seção considerada. Um tipo muito diferente de tensão é obtido quando forças transversais **P** e **P′** são aplicadas à barra *AB* (Fig. 1.15). Ao passar um corte na seção transversal *C* entre os pontos de aplicação das duas forças (Fig. 1.16*a*), obtemos o diagrama da parte *AC* mostrada na Fig. 1.16*b*. Concluímos que devem existir forças internas no plano da seção e que a resultante dessas forças é igual a **P**. Essas forças internas elementares são chamadas de *forças de cisalhamento* e a intensidade *P* de sua resultante é a

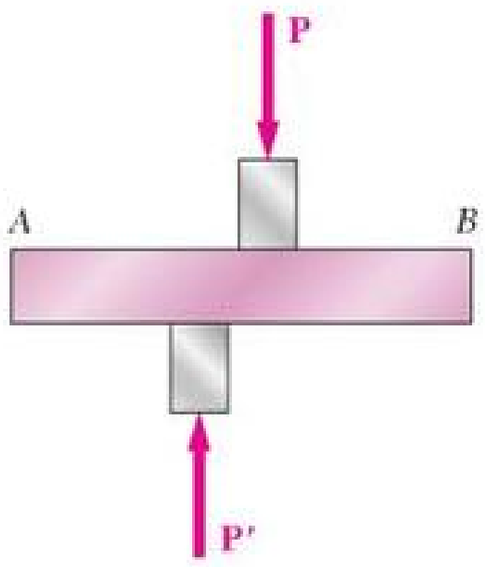


Fig. 1.15

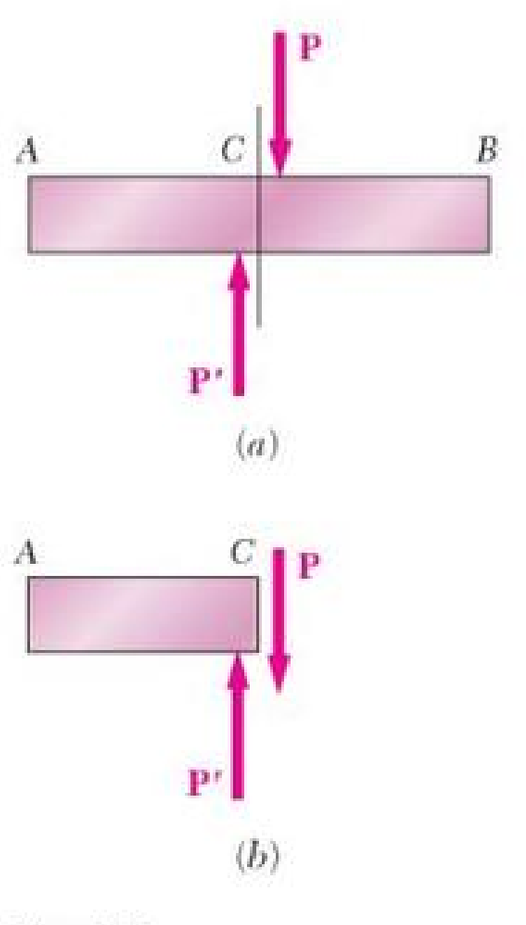


Fig. 1.16

força cortante na seção. Ao dividir a força cortante P pela área A da seção transversal, obtemos a *tensão média de cisalhamento* na seção. Indicando a tensão de cisalhamento pela letra grega τ (tau), temos

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Deve-se enfatizar que o valor obtido é um valor médio da tensão de cisalhamento sobre a seção toda. Ao contrário do que dissemos antes para as tensões normais, a distribuição da tensão de cisalhamento por meio da seção *não pode* ser considerada uniforme. Conforme veremos no Capítulo 6, o valor real τ da tensão de cisalhamento varia de zero na superfície da barra até um valor máximo $\tau_{máx}$, que pode ser muito maior que o valor médio $\tau_{méd}$.

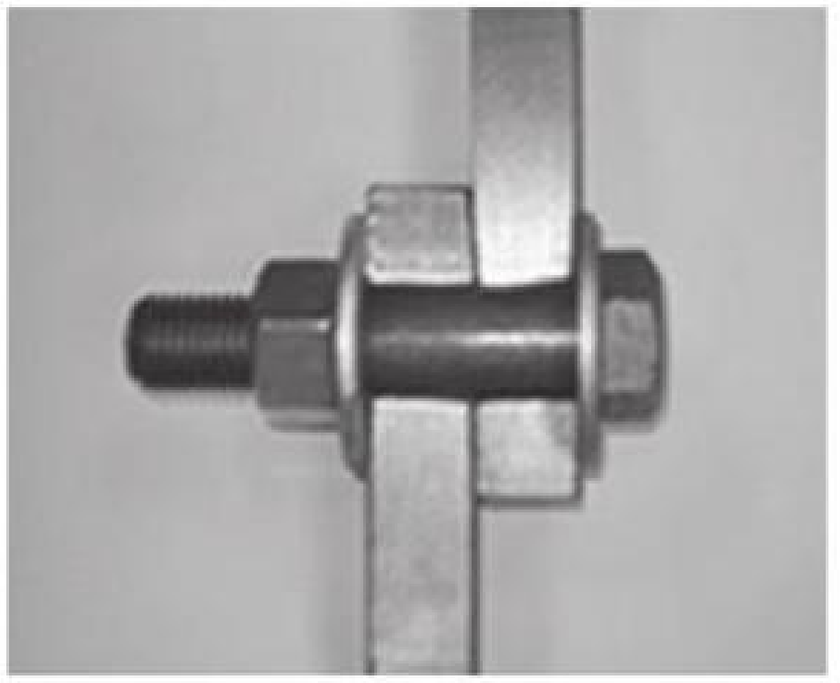


Fig. 1.17 Vista em corte de uma conexão com um parafuso em cisalhamento.

As tensões de cisalhamento são encontradas comumente em parafusos, pinos e rebites utilizados para conectar vários elementos estruturais e elementos de máquinas (Fig. 1.17). Considere as duas placas A e B, conectadas por um parafuso CD (Fig. 1.18). Se as placas estiverem submetidas a forças de tração de intensidade F, serão desenvolvidas tensões na seção EE' do parafuso. Desenhando os diagramas do parafuso e da parte localizada acima do plano EE' (Fig. 1.19), concluímos que a força cortante P na seção é igual a F. A tensão de cisalhamento média na seção é obtida de acordo com a Fórmula (1.8), dividindo-se a força cortante $P = F$ pela área A da seção transversal:

$$\tau_{méd} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

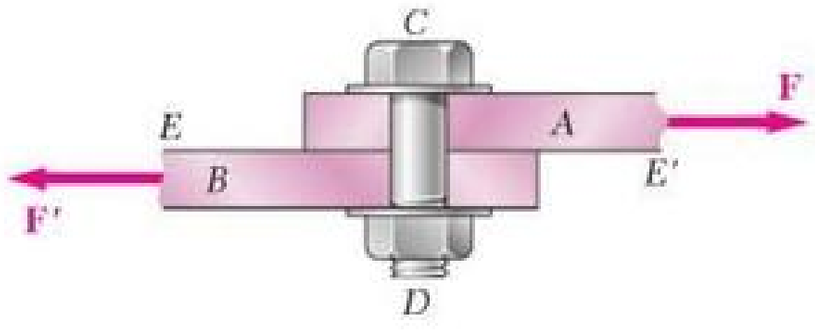


Fig. 1.18

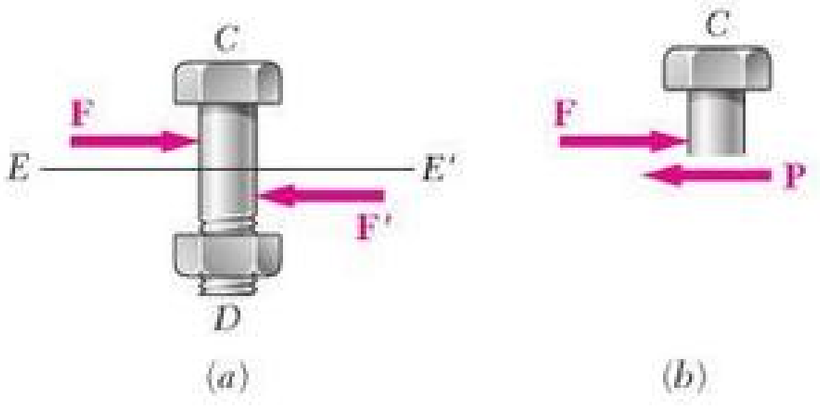


Fig. 1.19

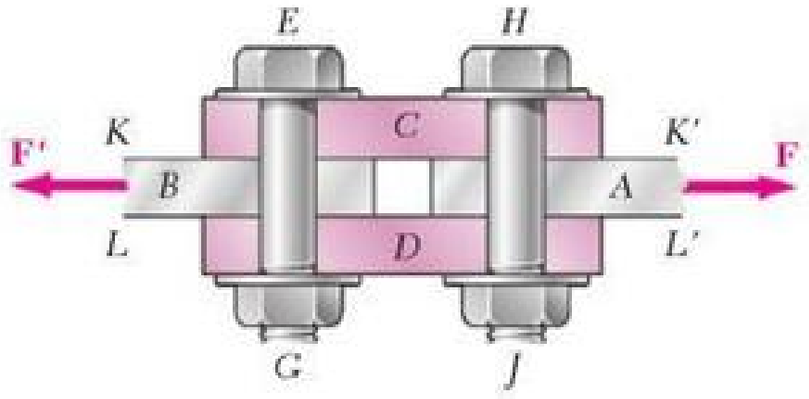


Fig. 1.20

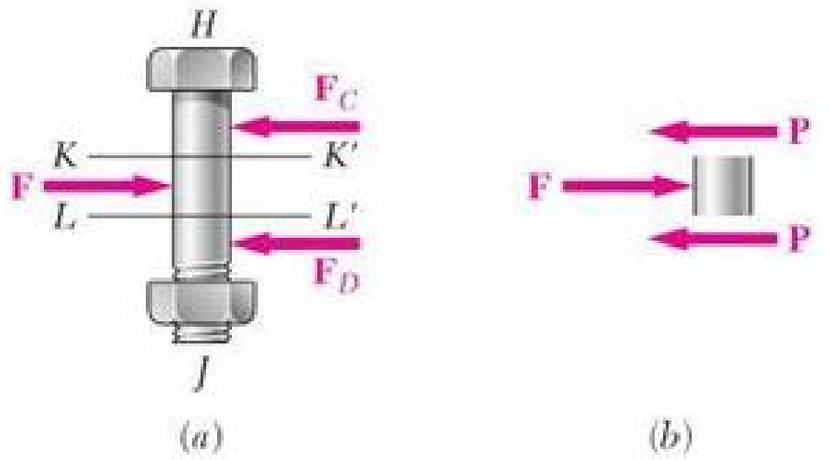


Fig. 1.21

Podemos dizer que o parafuso que acabamos de considerar encontra-se em *cisalhamento simples*. No entanto, podem ocorrer diferentes situações de carga. Por exemplo, se forem utilizadas chapas de ligação C e D para conectar as placas A e B (Fig. 1.20), o cisalhamento ocorrerá no parafuso HJ em cada um dos dois planos KK' e LL' (e similarmente no parafuso EG). Dizemos que os parafusos estão na condição de *cisalhamento duplo*. Para determinar a tensão de cisalhamento média em cada plano, desenhamos os diagramas de corpo livre do parafuso HJ e da parte do parafuso localizada entre os dois planos (Fig. 1.21). Observando que a força cortante P em cada uma das seções é $P = F/2$, concluímos que a tensão média de cisalhamento é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

1.7. Tensão de esmagamento em conexões

Parafusos, pinos e rebites criam tensões ao longo da *superfície de esmagamento*, ou de contato, nos elementos que eles conectam. Por exemplo, considere novamente as duas placas A e B conectadas por um parafuso CD que discutimos na seção anterior (Fig. 1.18). O parafuso exerce na placa A uma força **P** igual e oposta à força **F** exercida pela placa no parafuso (Fig. 1.22). A força **P** representa a resultante das forças elementares distribuídas na superfície interna de um meio-cilindro de diâmetro d e de comprimento t igual à espessura da placa. Como a distribuição dessas forças e as tensões correspondentes são muito complicadas, utiliza-se na prática um valor nominal médio σ_e para a tensão, chamado de *tensão de esmagamento*, obtido dividindo-se a carga P pela área do retângulo que representa a projeção do parafuso sobre a seção da placa (Fig. 1.23). Como essa área é igual a td, onde t é a espessura da placa e d o diâmetro do parafuso, temos

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

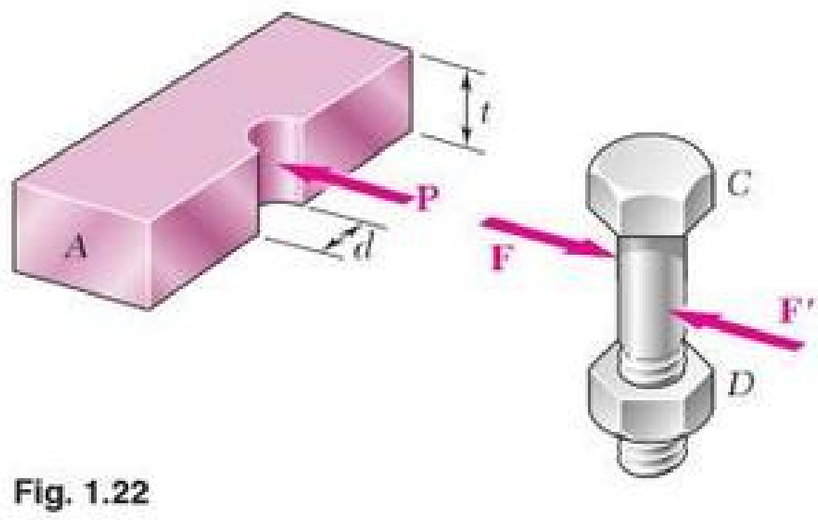


Fig. 1.22

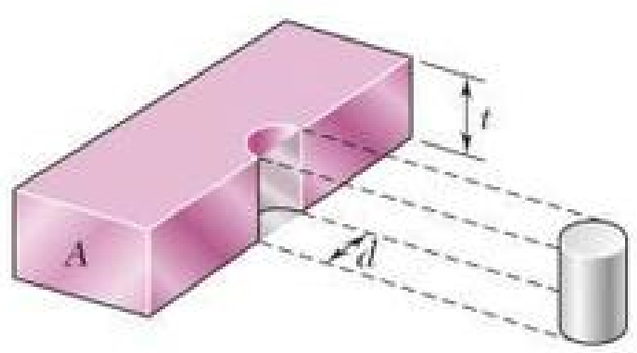


Fig. 1.23

1.8. Aplicação à análise e projeto de estruturas simples

Estamos agora em condições de determinar as tensões nos elementos e conexões de várias estruturas simples bidimensionais e, portanto, em condições de projetar essas estruturas.

Como exemplo, vamos voltar à estrutura da Fig. 1.1 que consideramos na Seção 1.2 e vamos especificar os suportes e conexões em A, B e C. Como mostra a Fig. 1.24, a barra BC com diâmetro de 20 mm tem extremidades achatadas com seção transversal retangular de 20 × 40 mm, ao passo que a barra AB tem uma seção transversal retangular de 30 × 50 mm e está presa com uma articulação na extremidade B. Ambos os elementos são conectados em B por um pino a partir do qual é suspensa a carga de 30 kN, por meio de um suporte em forma de U. A barra AB é suportada em A por um pino preso em um suporte duplo, enquanto a barra BC está conectada em C a um suporte simples. Todos os pinos têm 25 mm de diâmetro.

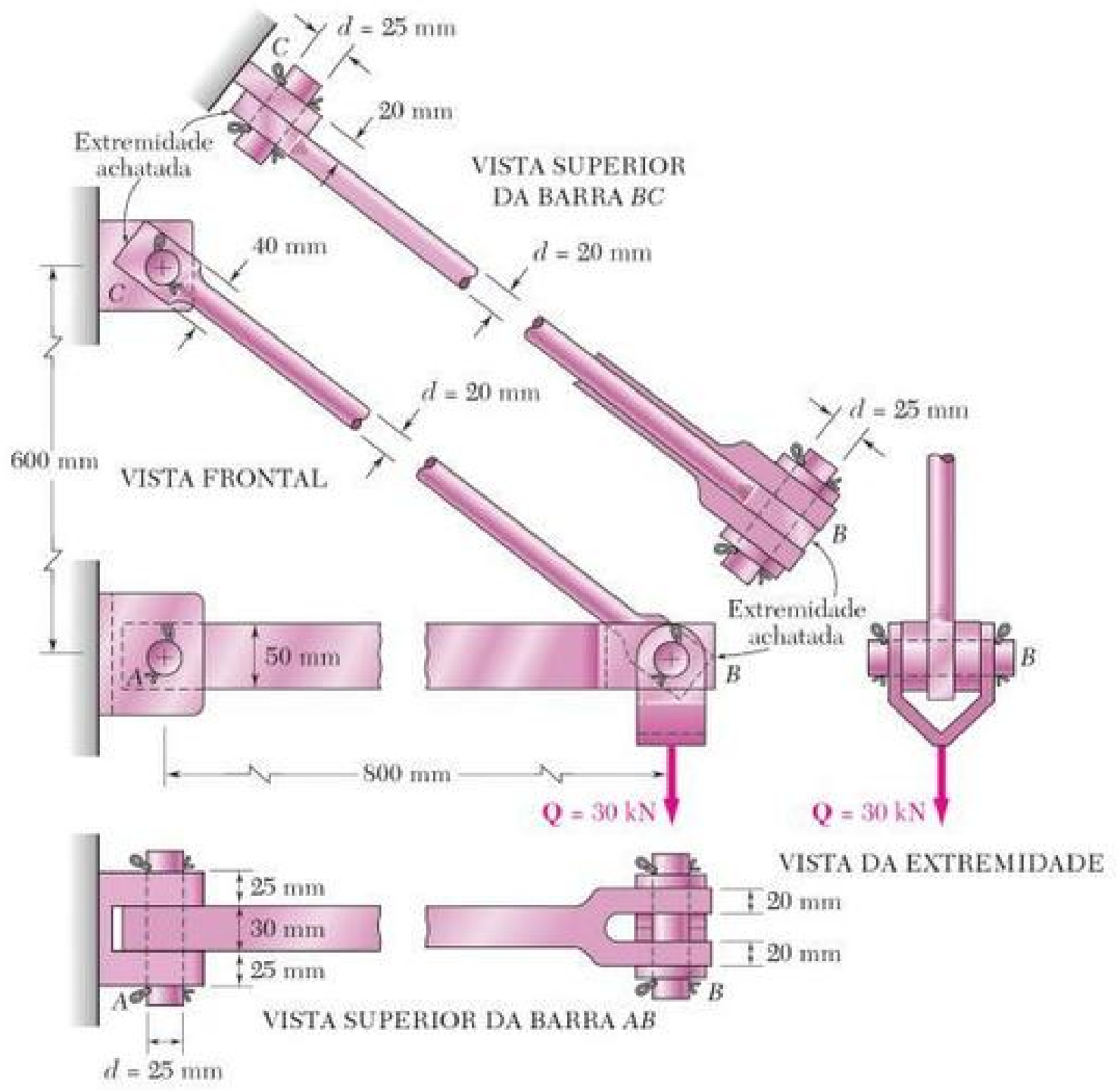


Fig. 1.24

a. Determinação da tensão normal nas barras *AB* e *BC*. Conforme determinamos nas Seções 1.2 e 1.4, a força na barra BC é $F_{BC} = 50$ kN (tração) e a área de sua seção transversal circular é $A = 314 \times 10^{-6}$ m^2; a tensão normal média correspondente é $\sigma_{BC} = +159$ MPa. No entanto, as partes

achatadas da barra também estão sob tração, e na seção mais estreita, na qual está localizado um furo, temos

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

O valor médio correspondente da tensão é, portanto,

$$(\sigma_{BC})_{\text{ext}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167 \text{ MPa}$$

Note que esse é um *valor médio*: próximo ao furo, a tensão realmente terá um valor muito maior, como veremos na Seção 2.18. Está claro que, sob uma carga crescente, a barra falhará próximo de um dos furos e não na sua parte cilíndrica; seu projeto, portanto, poderia ser melhorado aumentando-se a largura ou a espessura das extremidades achatadas da barra.

Voltando nossa atenção agora para a barra AB, recordaremos da Seção 1.2 que a força na barra é $F_{AB} = 40$ kN (compressão). Como a área da seção transversal retangular da barra é $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, o valor médio da tensão normal na parte principal da barra entre os pinos A e B é

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26{,}7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26{,}7 \text{ MPa}$$

Observe que as seções de área mínima em A e B não estão sob tensão, pois a barra está em compressão e, portanto, *empurra* os pinos (em vez de *puxá-los* como faz a barra BC).

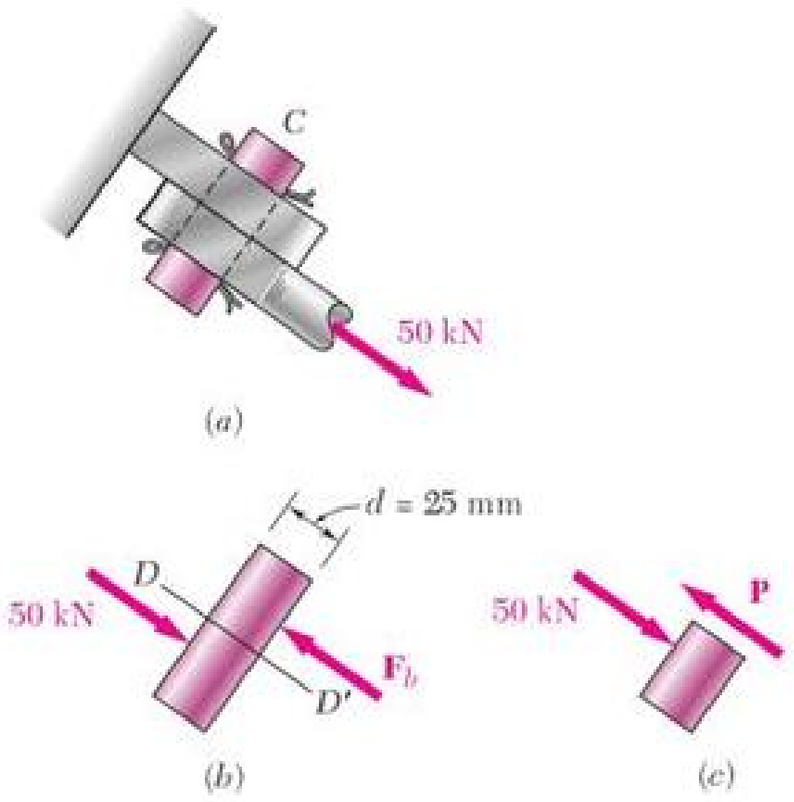


Fig. 1.25

b. Determinação da tensão de cisalhamento em várias conexões. Para determinarmos a tensão de cisalhamento em uma conexão, por exemplo um parafuso, pino ou rebite, primeiro mostramos claramente as forças aplicadas pelas várias barras que ela conecta. Assim, no caso do pino C em nosso exemplo (Fig. 1.25*a*), desenhamos a Fig. 1.25*b*, mostrando a força de 50 kN, aplicada pela barra BC sobre o pino, e a força igual e oposta aplicada pelo suporte. Desenhando agora o diagrama da parte do pino localizada abaixo do plano DD' em que ocorrem as tensões de cisalhamento (Fig. 1.25*c*), concluímos que a força cortante naquele plano é $P = 50$ kN. Como a área da seção transversal do pino é

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{25 \text{ mm}}{2}\right)^2 = \pi(12{,}5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

concluímos que o valor médio da tensão de cisalhamento no pino C é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

Considerando agora o pino em A (Fig. 1.26), notamos que ele está na condição de cisalhamento duplo. Desenhando os diagramas de corpo livre do pino e da parte do pino localizada entre os planos DD' e EE' em que ocorrem as tensões de cisalhamento, concluímos que $P = 20$ kN e que

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40{,}7 \text{ MPa}$$

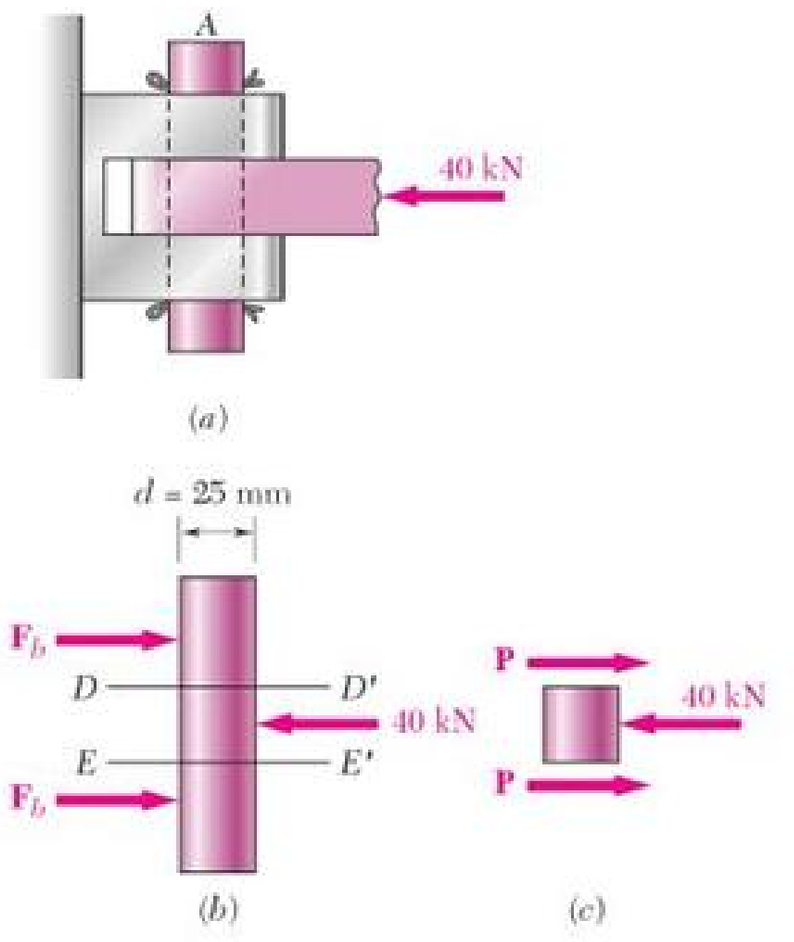


Fig. 1.26

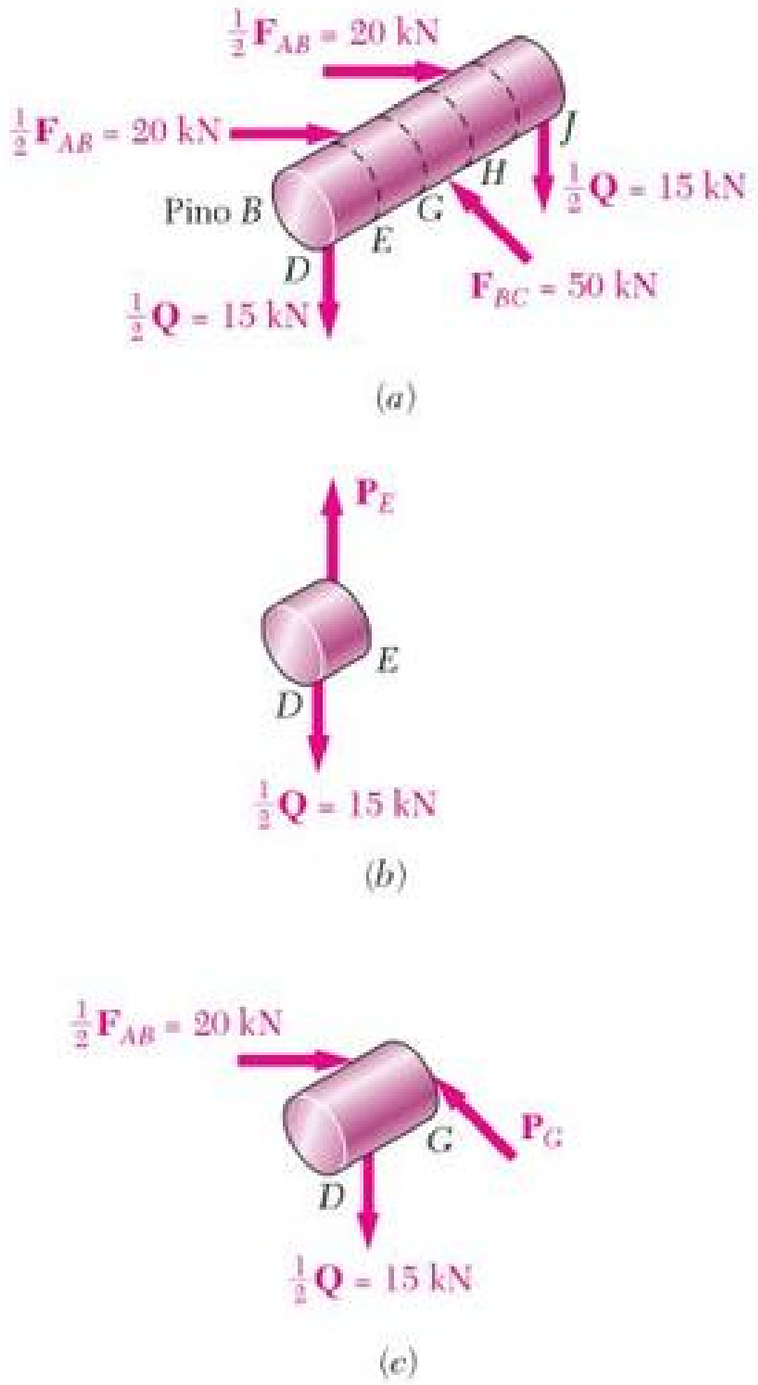


Fig. 1.27

Considerando o pino em B (Fig. 1.27*a*), verificamos que ele pode ser dividido em cinco partes que estão sob a ação de forças aplicadas pelas barras e suporte. Considerando sucessivamente as partes DE (Fig. 1.27*b*) e DG (Fig. 1.27*c*), concluímos que a força cortante na seção E é $P_E = 15$ kN, enquanto a força cortante na seção G é $P_G = 25$ kN. Como a carga do pino é simétrica, concluímos que o valor máximo da força cortante no pino B é $P_G = 25$ kN e que a maior tensão de cisalhamento ocorre nas seções G e H, em que

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P_G}{A} = \frac{25 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 50{,}9 \text{ MPa}$$

c. Determinação das tensões de esmagamento. Para determinarmos a tensão de esmagamento nominal em A na barra AB, utilizamos a Fórmula (1.11) da Seção 1.7. Da Fig. 1.24, temos $t = 30$ mm e $d = 25$ mm. Lembrando que $P = F_{AB} = 40$ kN, temos

$$\sigma_e = \frac{F}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(30 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 53{,}3 \text{ MPa}$$

Para obtermos a tensão de esmagamento no suporte em A, utilizamos $t = 2(25 \text{ mm}) = 50$ mm e $d = 25$ mm:

$$\sigma_e = \frac{P}{td} = \frac{40 \text{ kN}}{(50 \text{ mm})(25 \text{ mm})} = 32{,}0 \text{ MPa}$$

As tensões de esmagamento em B na barra AB, em B e C na barra BC e no suporte em C são encontradas de forma semelhante.

1.9. Método de solução do problema

Você deve abordar um problema em resistência dos materiais da mesma maneira como abordaria uma situação real de engenharia. Utilizando sua experiência e intuição, você terá mais facilidade para entender e formular o problema. No entanto, uma vez definido claramente o problema, não há lugar em sua solução para divagações. A solução deverá ser com base nos princípios fundamentais da estática e nos princípios que você aprenderá neste curso. Cada passo a executar deverá ser justificado com base no que acabamos de dizer, não restando lugar para "intuição". Depois de obtida a resposta, ela deverá ser verificada. Aqui novamente, você pode utilizar o seu bom senso e a experiência pessoal. Se não estiver completamente satisfeito com o resultado obtido, verifique cuidadosamente a formulação do problema, a validade dos métodos utilizados em sua solução e a precisão dos seus cálculos.

O *enunciado* do problema deverá ser claro e preciso. Deverá conter os dados fornecidos e indicar as informações necessárias. Deve-se incluir também um desenho simplificado que mostre todas as grandezas essenciais envolvidas. A solução da maioria dos problemas que você encontrará, necessitará que

primeiro sejam determinadas as *reações nos apoios* e as *forças e conjugados internos*. Isso vai requerer o desenho de um ou vários *diagramas de corpo livre*, como fizemos na Seção 1.2, a partir dos quais você escreverá as *equações de equilíbrio*. Essas equações podem ser resolvidas em função das forças desconhecidas, a partir das quais serão calculadas as *tensões* e *deformações* correspondentes.

Após obter a resposta, ela deverá ser *cuidadosamente verificada*. Erros de *raciocínio* frequentemente podem ser detectados ao rastrear as unidades envolvidas nos cálculos feitos e verificando se as unidades obtidas para a resposta são compatíveis. Por exemplo, no projeto da barra discutida na Seção 1.4, encontramos, após especificar as unidades nos nossos cálculos, que o diâmetro necessário para a barra estava expresso em milímetros, que é a unidade correta para uma medida de comprimento; se tivéssemos encontrado uma outra unidade, saberíamos que algum engano foi cometido.

Erros de *cálculo* geralmente podem ser detectados substituindo-se nas equações os valores numéricos obtidos que ainda não foram utilizados, e verificando se a equação é satisfatória. Nunca é demais destacar a importância do cálculo correto na engenharia.

1.10. Precisão numérica

A precisão da solução de um problema depende de dois itens: (1) a precisão dos dados fornecidos e (2) a precisão dos cálculos executados.

A solução não pode ser mais precisa do que o menos preciso desses dois itens. Por exemplo, se a carga de uma viga for 75000 N com um possível erro de 100 N para mais ou para menos, o erro relativo que mede o grau de precisão dos dados é

$$\frac{100\ \text{N}}{75\,000\ \text{N}} = 0{,}0013 = 0{,}13\,\%$$

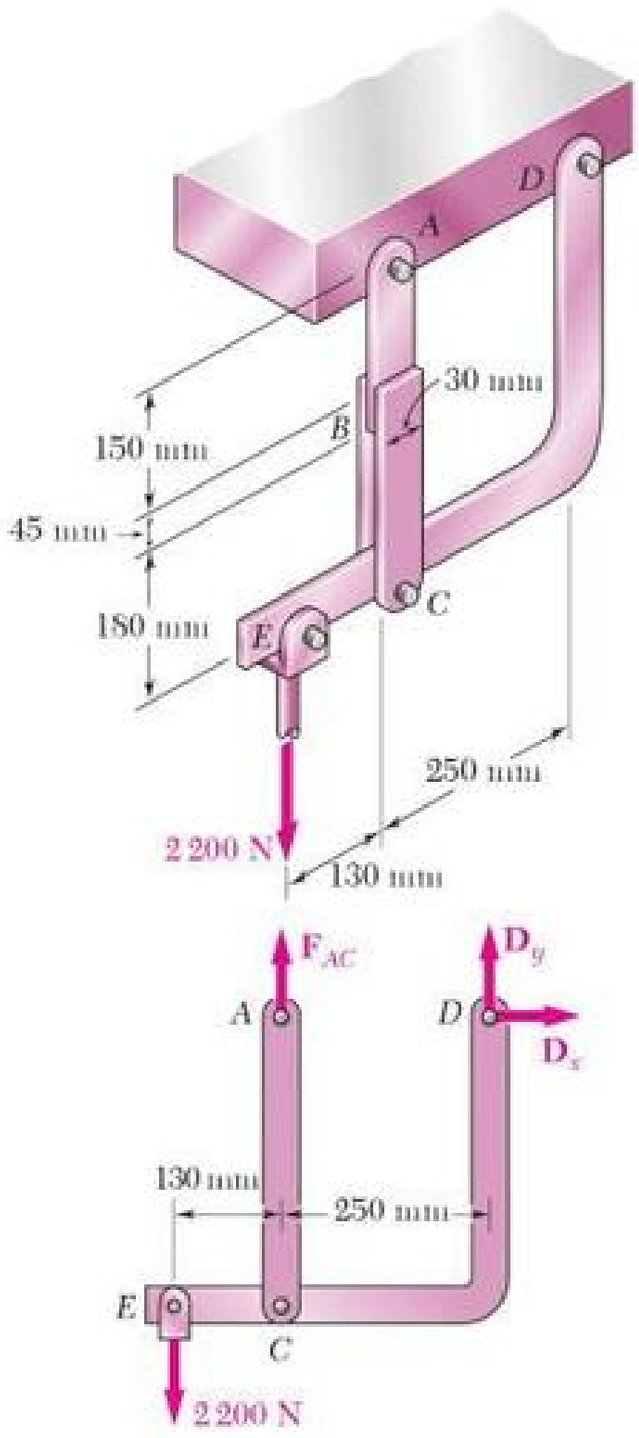
Ao calcular a reação em um dos apoios da viga, não teria significado expressá-la como 14 322 N. A precisão da solução não pode ser maior do que 0,13%, não importa quanto precisos sejam os cálculos, e o erro possível na resposta pode ser de até (0,13/100)(14 322 N) ≈ 20 N. A resposta adequada deverá ser dada como 14 320 ± 20 N.

Em problemas de engenharia, raramente os dados são conhecidos com uma precisão maior do que 0,2%. Portanto, não se justifica dar as respostas desses problemas com uma precisão maior que 0,2%. Uma regra prática é utilizilar quatro algarismos para representar números começados com um "1" e três algarismos em todos os outros casos. A menos que seja indicado o contrário, os dados fornecidos em um problema deverão ser considerados conhecidos com um grau comparável de precisão. Por exemplo, uma força de 40 N deverá ser lida como 40,0 N e uma força de 15 N deverá ser lida como 15,00 N.

As calculadoras de bolso e os computadores são amplamente utilizados pelos engenheiros e estudantes de engenharia. A velocidade e precisão desses dispositivos facilitam os cálculos numéricos nas soluções de muitos problemas. No entanto, os estudantes não devem utilizar mais algarismos significativos do que os necessários meramente porque são facilmente obtidos. Conforme mencionamos, uma precisão maior que 0,2% raramente é necessária ou significativa na solução prática dos problemas de engenharia.

PROBLEMA RESOLVIDO 1.1

No suporte mostrado na figura, a parte superior do elemento *ABC* tem 9,5 mm de espessura e as partes inferiores têm 6,4 mm de espessura cada uma. É utilizada resina epóxi para unir as partes superior e inferior em *B*. O pino em *A* tem 9,5 mm de diâmetro e o pino usado em *C* tem 6,4 mm de diâmetro. Determine (*a*) a tensão de cisalhamento no pino *A*, (*b*) a tensão de cisalhamento no pino *C*, (*c*) a maior tensão normal no elemento *ABC*, (*d*) a tensão de cisalhamento média nas superfícies coladas em *B* e (*e*) a tensão de esmagamento no elemento em *C*.



SOLUÇÃO

Corpo livre: todo o suporte. Como o elemento *ABC* é uma barra simples, a reação em *A* é vertical; a reação em *D* é representada por suas componentes $\mathbf{D}_x$ e $\mathbf{D}_y$. Assim, temos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad (2\,200\text{ N})(380\text{ mm}) - F_{AC}(250\text{ mm}) = 0$$

$$F_{AC} = +3\,344\text{ N} \qquad F_{AC} = 3\,344\text{ N} \quad \textit{tração}$$

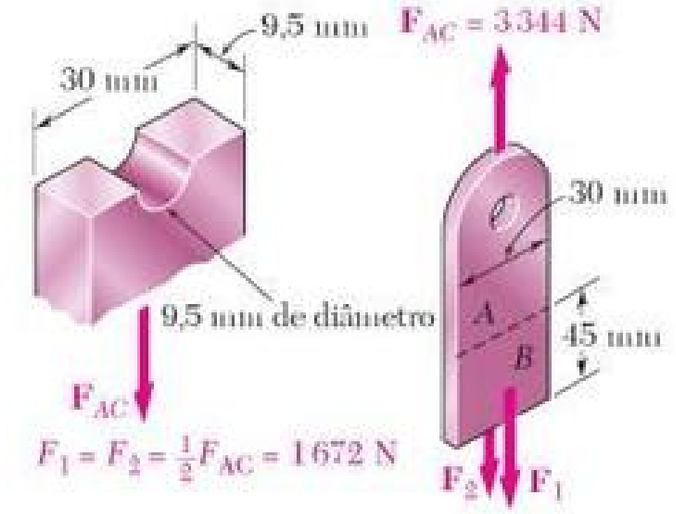
***a.* Tensão de cisalhamento no pino *A*.** Como este pino tem 9,5 mm de diâmetro e está sob cisalhamento simples, temos

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3\,344}{\frac{1}{4}\pi(9{,}5\text{ mm})^2} \qquad \tau_A = 47{,}2\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b.* Tensão de cisalhamento no pino *C*.** Como este é um pino de 6,4 mm de diâmetro e está sob cisalhamento duplo, temos

$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{1\,672\text{ N}}{\frac{1}{4}\pi(6{,}4\text{ mm})^2} \qquad \tau_C = 52{,}0\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***c.* Maior tensão normal no membro *ABC*.** A maior tensão é encontrada onde a area é menor; isso ocorre na seção transversal *A* em que está localizado o furo de 9,5 mm. Temos



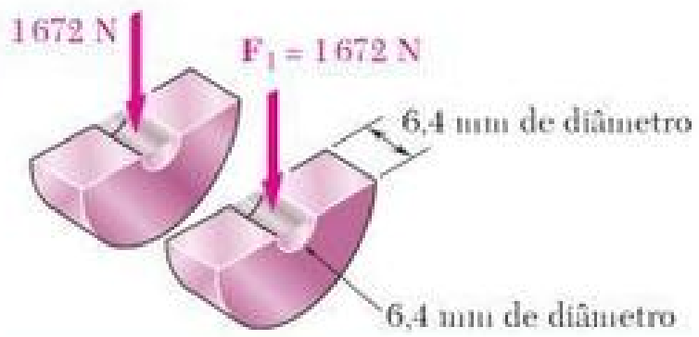
$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{líq}}} = \frac{3\,344\text{ N}}{(9{,}5\text{ mm})(30\text{ mm} - 9{,}5\text{ mm})} = \frac{3\,344\text{ N}}{194{,}75\text{ mm}^2}$$

$$\sigma_A = 17{,}2\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

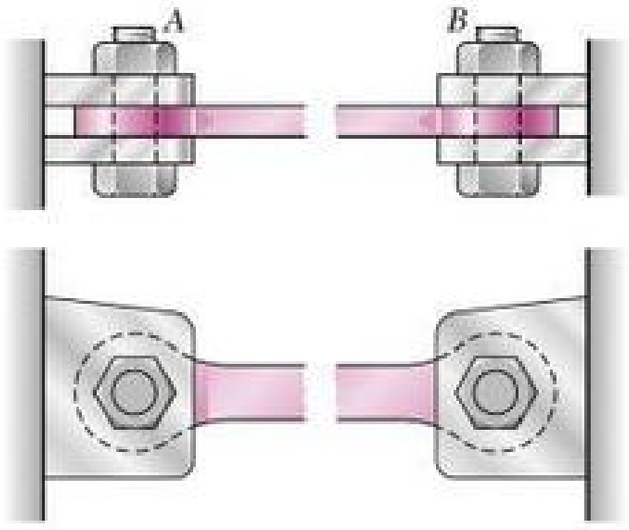
***d.* Tensão de cisalhamento média em *B*.** Notamos que existe ligação em ambos os lados da parte superior do membro ABC e que a força de cisalhamento em cada lado é $F_1 = (3\,344\text{ N})/2 = 1672\text{ N}$. A tensão de cisalhamento média em cada superficie é então

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1\,672\text{ N}}{(30\text{ mm})(45\text{ mm})} \qquad \tau_B = 1{,}24\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***e.* Tensão de esmagamento no membro ABC em *C*.** Para cada parte do vínculo, $F_1 = 1672\text{ N}$ e a área de contato nominal é (6,4 mm) (6,4 mm) = 40,96 mm^2,



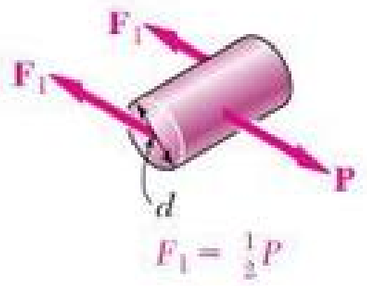
$$\sigma_e = \frac{F_1}{A} = \frac{1\,672\text{ N}}{40{,}96\text{ mm}^2} \qquad \sigma_e = 40{,}8\text{ MPa} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESOLVIDO 1.2

A barra de ligação de aço mostrada na figura deve suportar uma força de tração de intensidade $P = 120$ kN quando é rebitada entre suportes duplos em A e B. A barra será feita a partir de uma chapa de 20 mm de espessura. Para a classe do aço a ser utilizado, as tensões máximas admissíveis são: $\sigma = 175$ MPa, $\tau = 100$ MPa, $\sigma_e = 350$ MPa. Projete a barra determinando os valores necessários de (*a*) o diâmetro d do parafuso, (*b*) a dimensão b em cada extremidade da barra e (*c*) a dimensão h da barra.

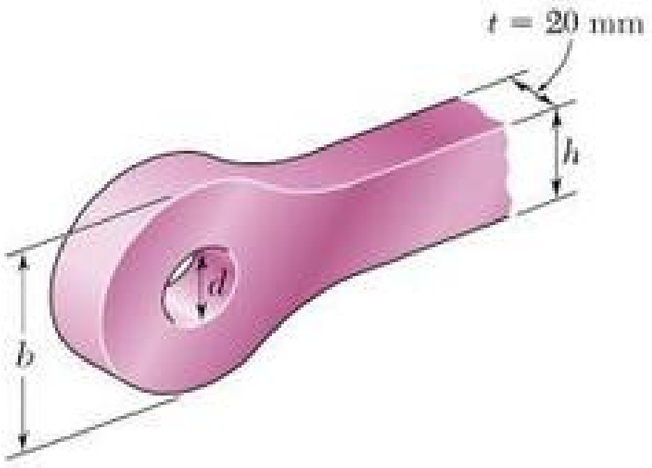
SOLUÇÃO



***a*. Diâmetro do parafuso.** Como o parafuso está sob cisalhamento duplo, $F_1 = \frac{1}{2}P = 60$ kN.

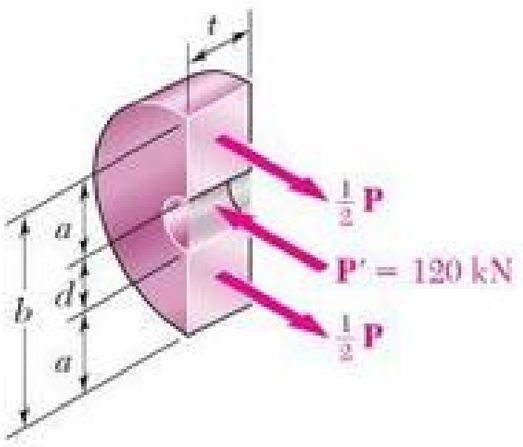
$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad 100\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \qquad d = 27{,}6\text{ mm}$$

Utilizaremos $d = 28$ mm ◀



Neste ponto verificamos a tensão de esmagamento entre a chapa de 20 mm de espessura e o parafuso com 28 mm de diâmetro.

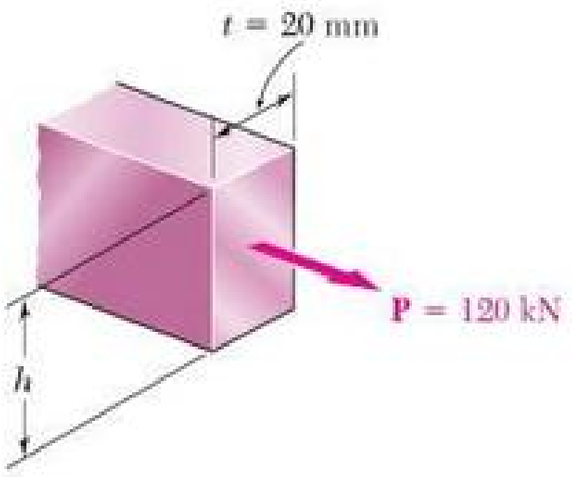
$$\tau_e = \frac{P}{td} = \frac{120\text{ kN}}{(0{,}020\text{ m})(0{,}028\text{ m})} = 214\text{ MPa} < 350\text{ MPa} \qquad \text{OK}$$



***b*. Dimensão *b* em cada extremidade da barra.** Vamos considerar uma das partes extremas da barra. Lembrando que a espessura da chapa de aço é $t = 20$ mm e que a tensão de tração média não deve exceder 175 MPa, temos

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}P}{ta} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{60\text{ kN}}{(0{,}02\text{ m})a} \qquad a = 17{,}14\text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28\text{ mm} + 2(17{,}14\text{ mm}) \qquad b = 62{,}3\text{ mm} \blacktriangleleft$$



***c*. Dimensão *h* da barra.** Lembrando que a espessura da chapa de aço é $t = 20$ mm, temos

$$\sigma = \frac{P}{th} \qquad 175\text{ MPa} = \frac{120\text{ kN}}{(0{,}020\text{ m})h} \qquad h = 34{,}3\text{ mm}$$

Utilizaremos $h = 35$ mm ◀

PROBLEMAS

1.1 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia AB e BC são soldadas uma à outra em B e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Determine a intensidade da força **P** para a qual a tensão normal de tração na barra AB é duas vezes a intensidade da tensão de compressão da barra BC.

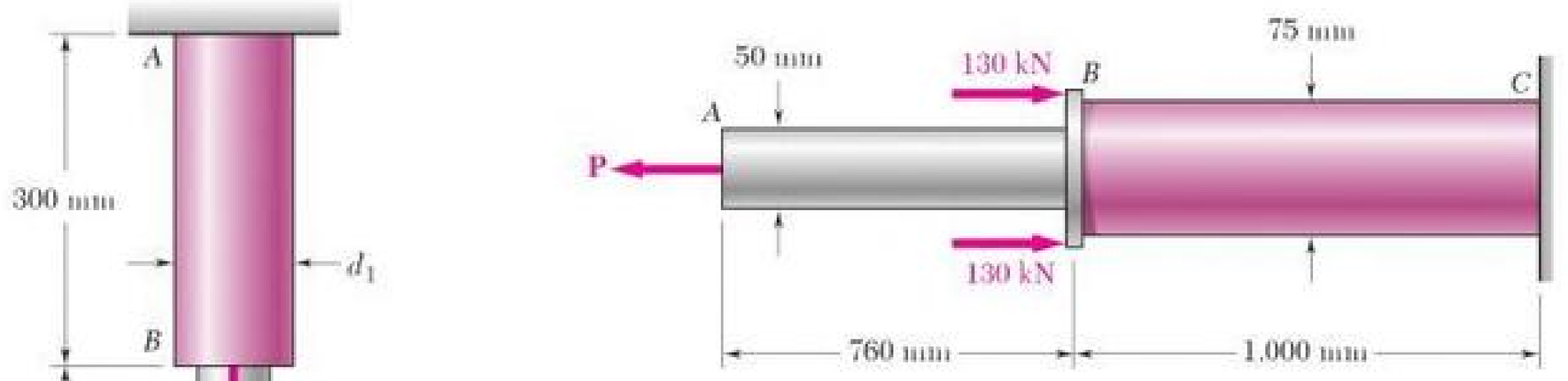


Fig. P1.1

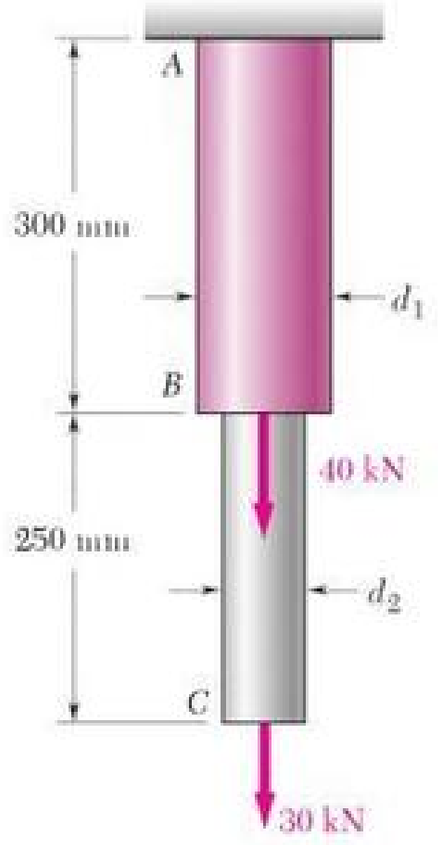


Fig. P1.3 e P1.4

1.2 No Problema 1.1, sabendo que $P = 177{,}9$ kN, determine a tensão normal média no ponto médio da (*a*) barra AB e (*b*) barra BC.

1.3 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia AB e BC são soldadas uma à outra em B e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão normal média não pode exceder 175 MPa na barra AB e 150 MPa na barra BC, determine os menores valores admissíveis de d_1 e d_2.

1.4 Duas barras cilíndricas de seção transversal cheia AB e BC são soldadas uma à outra em B e submetidas a um carregamento conforme mostra a figura. Sabendo que $d_1 = 50$ mm e $d_2 = 30$ mm, calcule a tensão normal média no ponto médio da (*a*) barra AB e (*b*) barra BC.

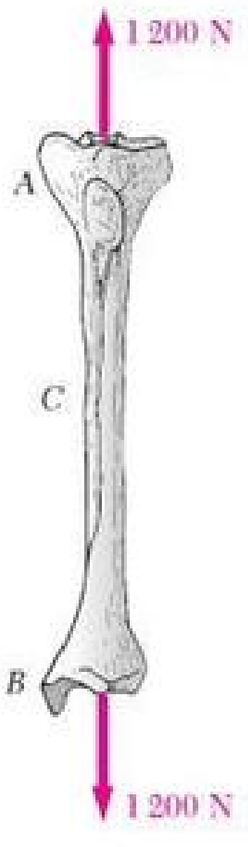


Fig. *P1.5*

1.5 Um medidor de deformação localizado em C na superfície do osso AB indica que a tensão normal média no osso é 3,80 MPa, quando o osso está submetido a duas forças de 1200 N como mostra a figura. Supondo que a seção transversal do osso em C seja anular e sabendo que seu diâmetro externo é 25 mm, determine o diâmetro interno da seção transversal do osso em C.

1.6 Duas chapas de aço precisam ser unidas por meio de parafusos de aço de alta resistência de 16 mm de diâmetro que se encaixam dentro de espaçadores cilíndricos de latão. Sabendo que a tensão normal média não deve exceder 200 MPa nos parafusos e 130 MPa nos espaçadores, determine o diâmetro externo dos espaçadores que resulte no projeto mais econômico e seguro.

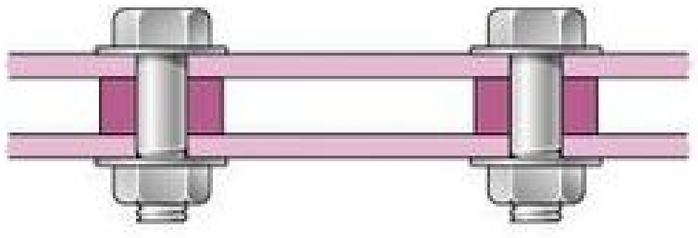


Fig. *P1.6*

1.7 Cada uma das quatro barras verticais tem uma seção transversal retangular uniforme de 8 × 36 mm e cada um dos quatro pinos tem um diâmetro de 16 mm. Determine o valor máximo da tensão normal média nos vínculos que conectam (*a*) os pontos *B* e *D* e (*b*) os pontos *C* e *E*.

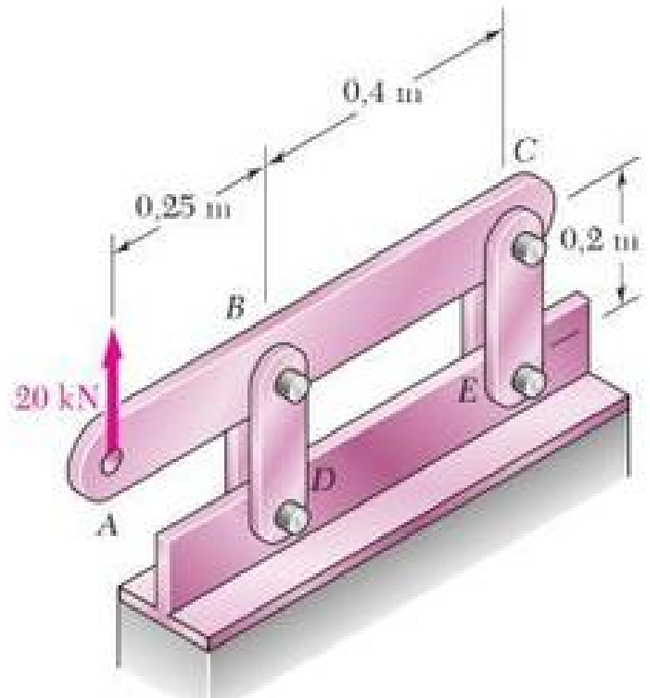


Fig. P1.7

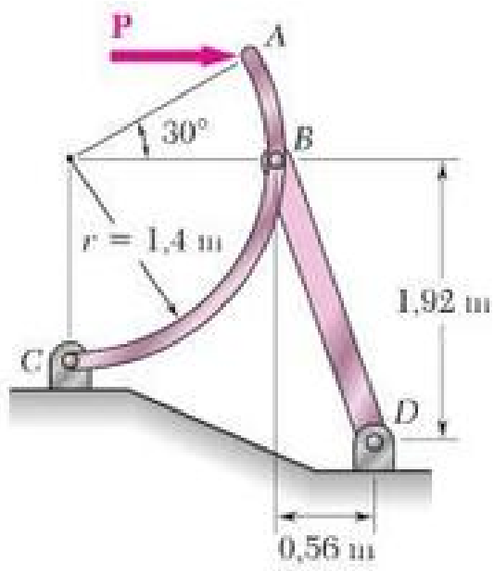


Fig. P1.8

1.8 Sabendo que a porção central da barra *BD* tem uma área de seção transversal uniforme de 800 mm², determine a intensidade da carga **P** para a qual a tensão normal naquela parte de *BD* é 50 MPa.

1.9 Sabendo que o elemento *DE* tem 25,4 mm de largura e 3,2 mm de espessura, determine a tensão normal na parte central daquele vínculo quando (*a*) $\theta = 0$ e (b) $\theta = 90°$.

1.10 A barra *AC* tem seção transversal retangular uniforme com 1,6 mm de espessura e 6,4 mm de largura. Determine a tensão normal na parte central da barra *AC*.

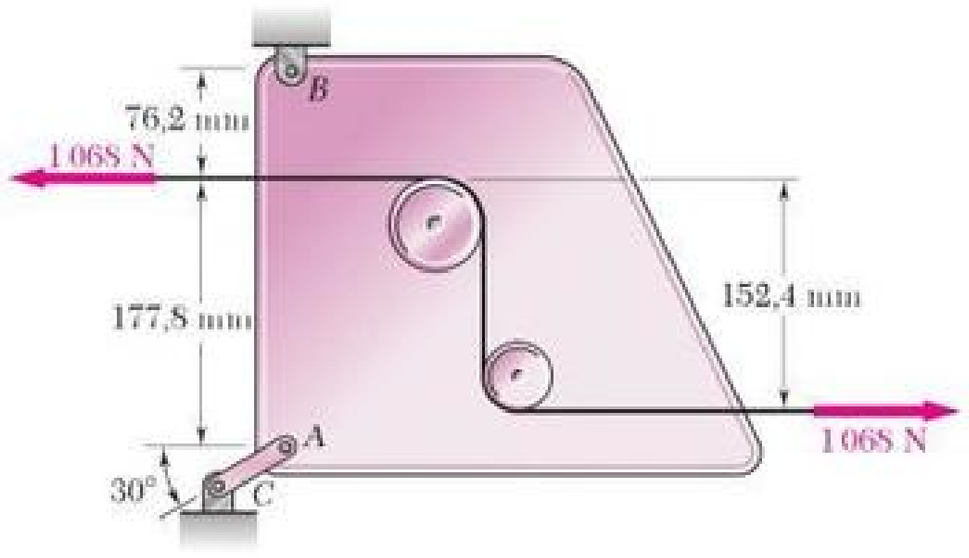


Fig. *P1.10*

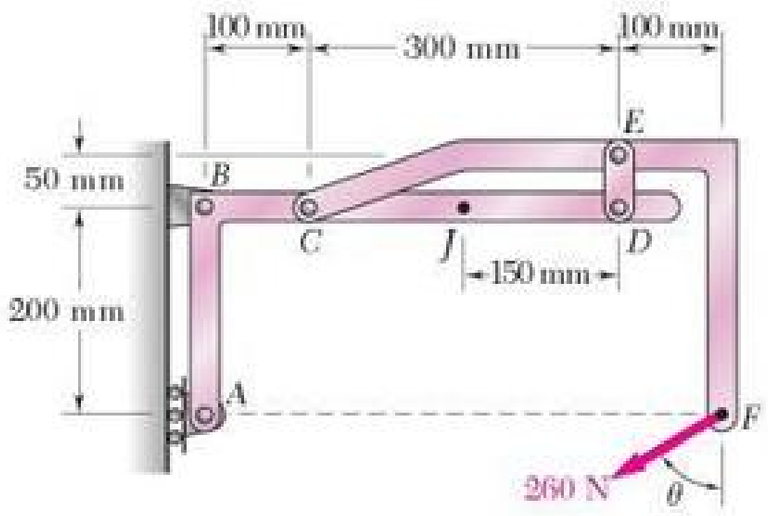


Fig. *P1.9*

1.11 A barra rígida *EFG* é suportada pelo sistema de treliça mostrado na figura. Sabendo que a componente *CG* é uma haste circular sólida de 19,0 mm de diâmetro, determine a tensão normal em *CG*.

1.12 A barra rígida *EFG* é suportada pelo sistema de treliça mostrado na figura. Determine a área da seção transversal do componente *AE* para a qual a tensão normal na componente é 103 MPa.

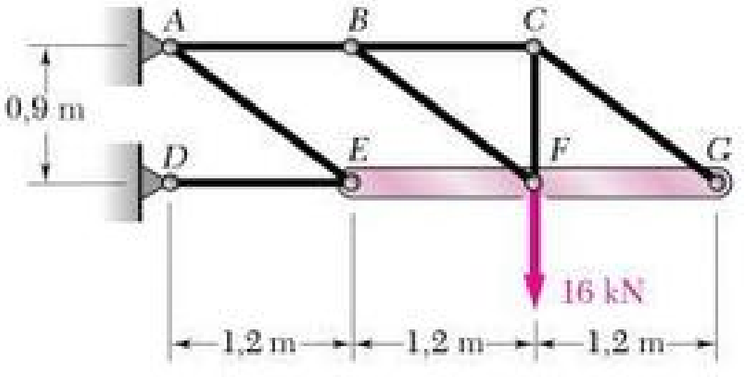


Fig. P1.11 e P1.12

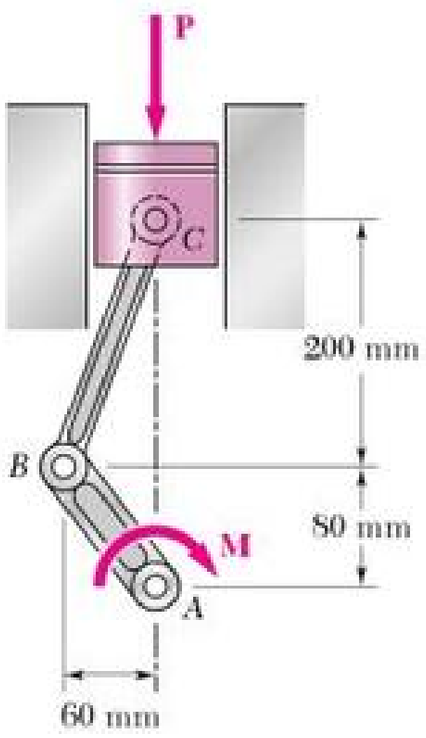


Fig. P1.13

1.13 O conjugado **M** de intensidade 1 500 N · m é aplicado à manivela de um motor. Para a posição mostrada, determine (*a*) a força **P** necessária para manter o sistema do motor em equilíbrio e (*b*) a tensão normal média na biela *BC*, que tem uma seção transversal uniforme de 450 mm^2.

1.14 A barra de um reboque aeronáutico está posicionada por um único cilindro hidráulico conectado a um pino de aço de 25 mm de diâmetro a duas guias para direção *DEF*. A massa de todo o conjunto é de 200 kg e seu centro de gravidade está localizado no ponto G. Para a posição mostrada, determine a tensão normal na barra.

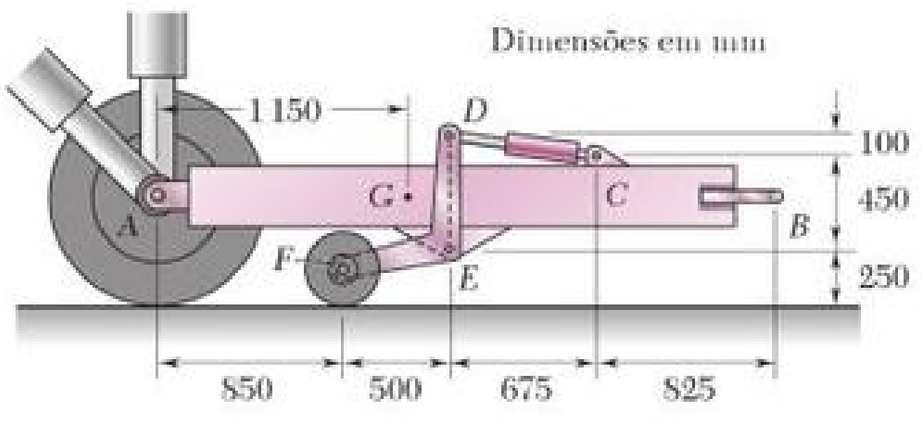


Fig. P1.14

1.15 As componentes de madeira *A* e *B* devem ser unidas por cobrejuntas de madeira compensada que serão totalmente coladas às superficies em contato. Como parte do projeto da junção, e sabendo que a folga entre as extremidades das componentes deve ser 6 mm, determine o comprimento *L* mínimo permitido para que a tensão de cisalhamento média na cola não exceda 700 kPa.

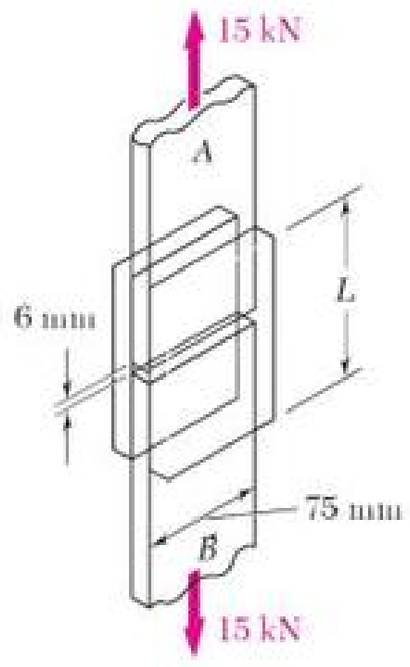


Fig. P1.15

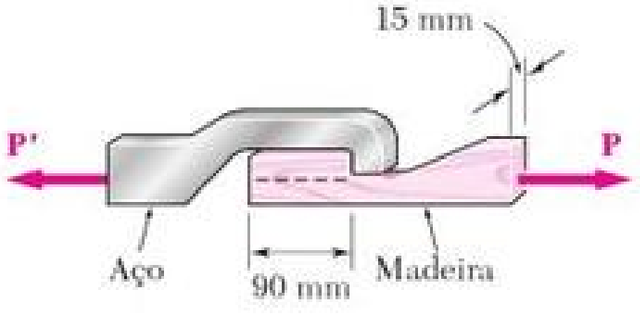


Fig. P1.16

1.16 Quando a força **P** alcançou 8 kN, o corpo de prova de madeira mostrado na figura falhou sob cisalhamento ao longo da superfície indicada pela linha tracejada. Determine a tensão de cisalhamento média ao longo daquela superfície no instante da falha.

1.17 Duas pranchas de madeira, cada uma com 12 mm de espessura e 225 mm de largura, são unidas pela junta de encaixe mostrada na figura. Sabendo que a madeira utilizada rompe por cisalhamento ao longo das fibras quando a tensão de cisalhamento média alcança 8 MPa, determine a intensidade **P** da carga axial que romperá a junta.

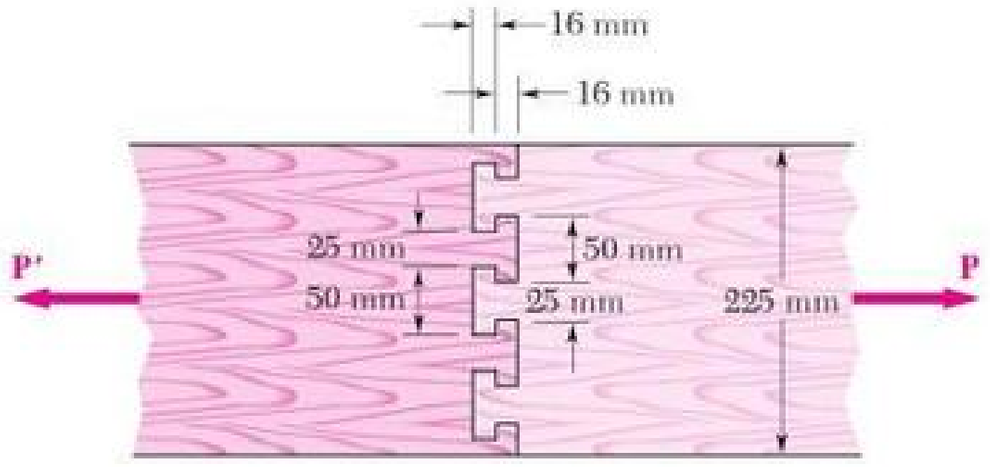


Fig. *P1.17*

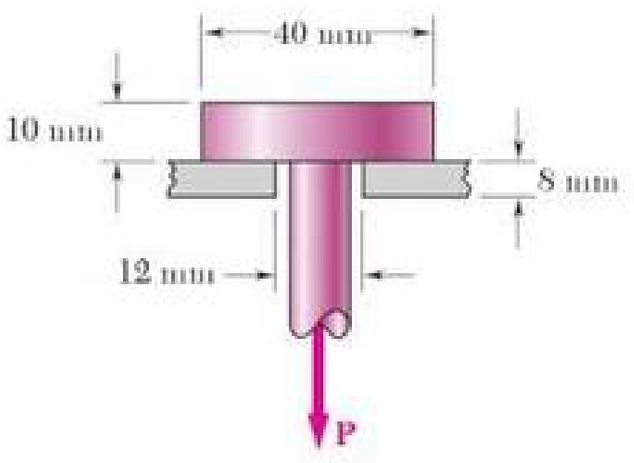


Fig. P1.18

1.18 Uma carga **P** é aplicada a uma barra de aço suportada por uma chapa de alumínio na qual foi feito um furo de 12 mm conforme mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento não deve exceder 180 MPa na barra de aço e 70 MPa na chapa de alumínio, determine a máxima carga **P** que pode ser aplicada à barra.

1.19 A força axial na coluna que suporta a viga de madeira mostrada na figura é $P = 75$ kN. Determine o menor comprimento L admissível para a chapa de contato para que a tensão de contato na madeira não exceda 3,0 MPa.

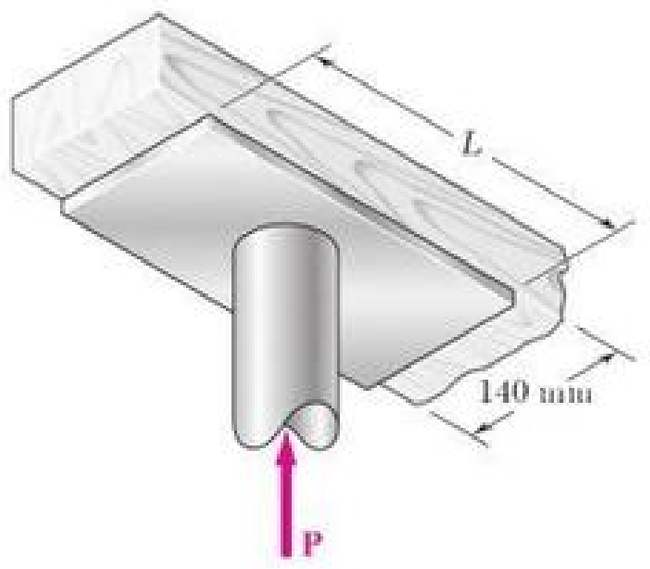


Fig. P1.19

1.20 A carga **P** aplicada ao pino de aço é distribuída para o suporte de madeira por uma arruela anelar. O diâmetro do pino é de 22 mm e o diâmetro interno da arruela é de 25 mm, sendo este ligeiramente maior que o diâmetro do orifício. Determine o menor diâmetro externo d admissível da arruela, sabendo que a tensão normal axial no pino de aço é de 35 MPa e a tensão média de contato entre a arruela e a madeira não pode exceder 5 MPa.

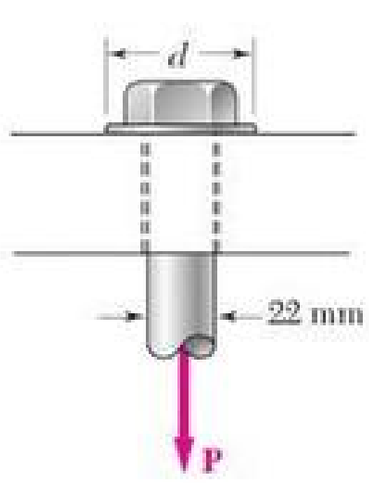


Fig. P1.20

1.21 Uma carga axial de 40 kN é aplicada a uma coluna curta de madeira suportada por uma base de concreto em solo estável. Determine (*a*) a tensão de contato máxima na base de concreto e (*b*) o tamanho da base para que a tensão de contato média no solo seja de 145 kPa.

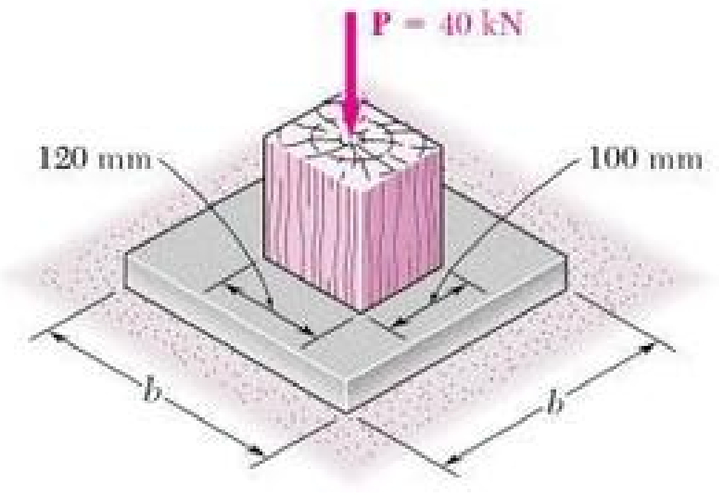


Fig. P1.21

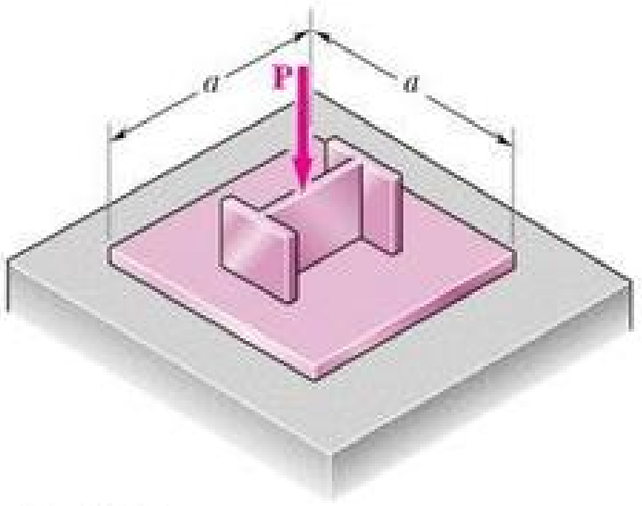


Fig. *P1.22*

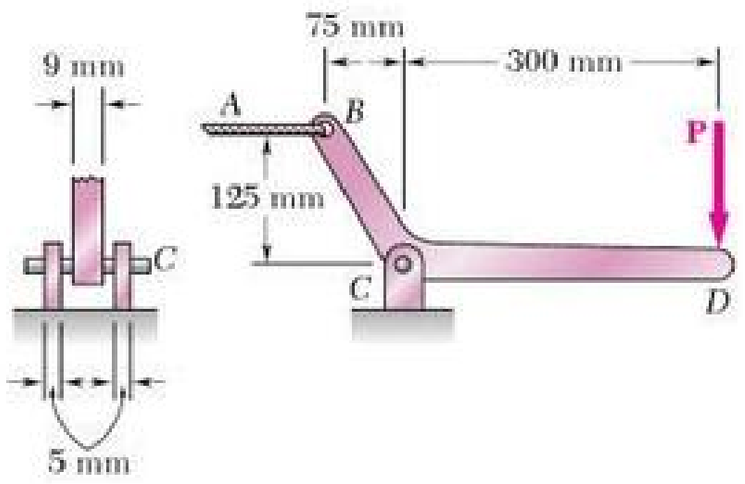


Fig. P1.23 e *P1.24*

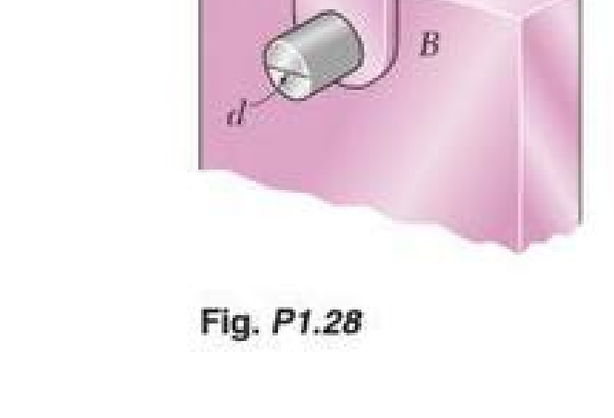


Fig. P1.25

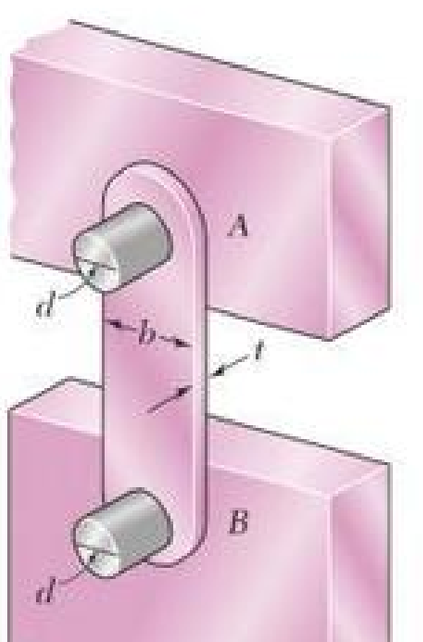


Fig. *P1.28*

1.22 Uma carga axial **P** é suportada por uma coluna curta W200 × 59 com seção transversal de área $A = 7650\ \text{mm}^2$ e distribuída a uma fundação de concreto por uma placa quadrada como mostra a figura. Sabendo que a tensão normal média na coluna não pode exceder 200 MPa e que a tensão de esmagamento na fundação de concreto não deve exceder 20 MPa, determine a dimensão a da chapa que proporcionará o projeto mais econômico e seguro.

1.23 Um pino com diâmetro de 6 mm é utilizada na conexão C do pedal mostrado na figura. Sabendo que $P = 500$ N, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino, (b) a tensão de esmagamento nominal no pedal em C e (c) a tensão de esmagamento nominal em cada lado do suporte em C.

1.24 Sabendo que uma força **P** de intensidade 750 N é aplicada ao pedal mostrado na figura, determine (a) o diâmetro do pino C para o qual a tensão de cisalhamento média no pino é 40 MPa, (b) a tensão de esmagamento correspondente no pedal em C e (c) a tensão de esmagamento correspondente em cada lado do suporte em C.

1.25 Uma barra de aço AB de 15,88 mm de diâmetro está encaixada em um furo redondo próximo à extremidade C de uma vigota de madeira CD. Para o carregamento mostrado, determine (a) a tensão normal média máxima na madeira, (b) a distância b para a qual a tensão de cisalhamento média é 690 kPa nas superfícies indicadas pelas linhas pontilhadas e (c) a tensão de esmagamento média na madeira.

1.26 Um sistema constituído de barras e cilindro hidráulico controla a posição dos garfos de uma empilhadeira. A carga suportada pelo sistema mostrado na figura é 6670 N. Sabendo que a espessura do elemento BD é 15,88 mm, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino de 12,5 mm de diâmetro em B e (b) a tensão de esmagamento em B no elemento BD.

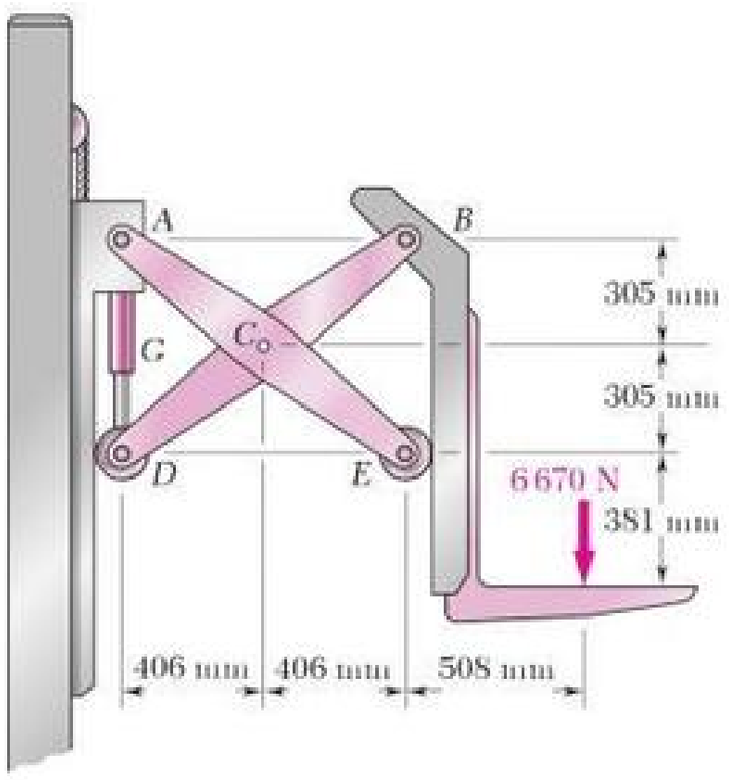


Fig. P1.26

1.27 Para a montagem e carregamento do Problema 1.7, determine (a) a tensão de cisalhamento média no pino B, (b) a tensão média de contato em B sobre o elemento BD e (c) a tensão de contato média em B sobre o elemento ABC, sabendo que esse membro tem 10 × 50 mm e seção retangular uniforme.

1.28 O vínculo AB, com largura $b = 50$ mm e espessura $t = 6$ mm, é utilizado para suportar a extremidade de uma viga horizontal. Sabendo que a tensão normal média no vínculo é −140 MPa e que a tensão de cisalhamento média em cada um dos dois pinos é 80 MPa, determine (a) o diâmetro d dos pinos e (b) a tensão de esmagamento média no vínculo.

1.11. Tensão em um plano oblíquo sob carregamento axial

Nas seções anteriores, vimos que forças axiais aplicadas em um elemento de barra (Fig. 1.28*a*) provocavam tensões normais na barra (Fig. 1.28*b*), enquanto forças transversais agindo sobre parafusos e pinos (Fig. 1.29*a*) provocavam tensões de cisalhamento nas conexões (Fig. 1.29*b*). A razão pela qual se observou uma relação entre forças axiais e tensões normais, por um lado, e forças transversais e tensões de cisalhamento, por outro lado, era porque as tensões estavam sendo determinadas apenas em planos perpendiculares ao eixo do elemento ou conexão. Conforme será visto nesta seção, forças axiais provocam tensões normais e tensões de cisalhamento em planos que não são perpendiculares ao eixo do elemento. Da mesma forma, forças transversais agindo sobre um parafuso ou um pino provocam tensões normais e tensões de cisalhamento em planos que não são perpendiculares ao eixo do parafuso ou pino.

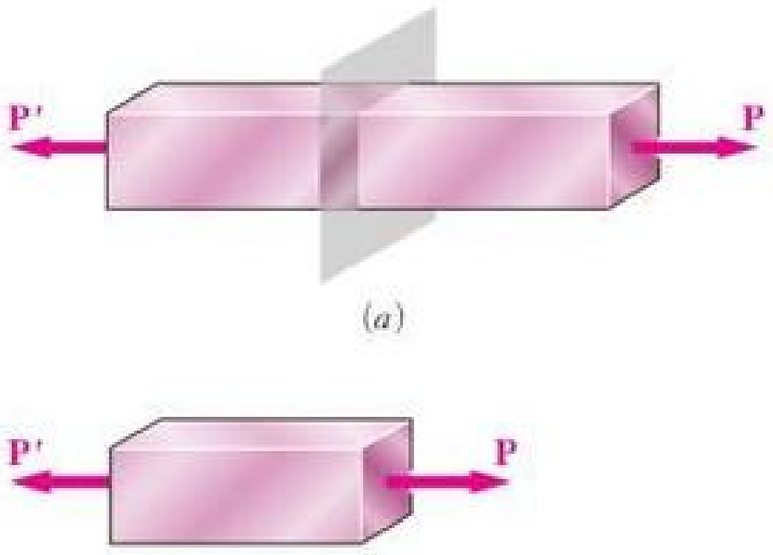


Fig. 1.28

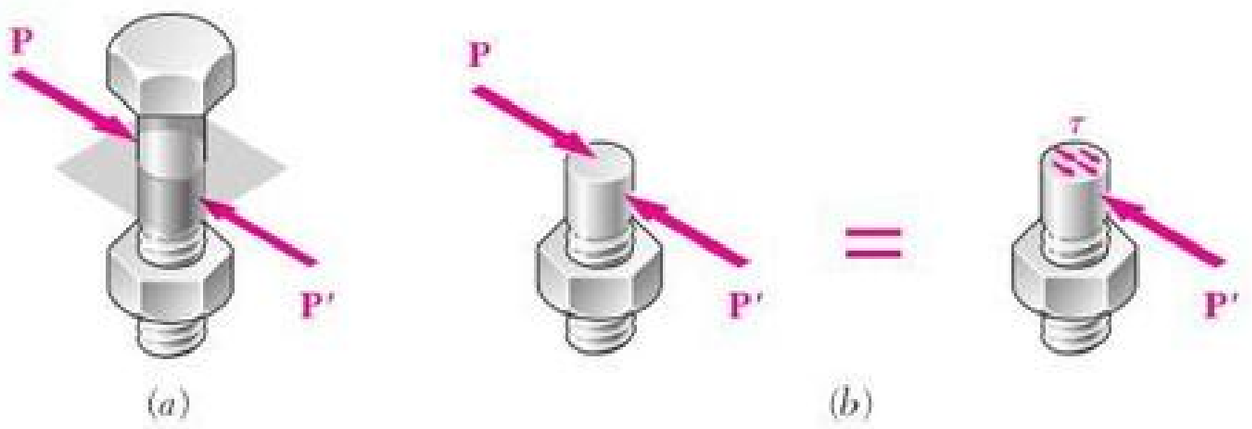


Fig. 1.29

Considere a barra da Fig. 1.28, que está submetida às forças axiais **P** e **P**′. Se cortarmos a barra por um plano formando um ângulo θ com um plano normal (Fig. 1.30*a*) e desenharmos o diagrama de corpo livre da parte do componente localizada à esquerda da seção (Fig. 1.30*b*), verificaremos, pelas condições de equilíbrio do corpo livre, que as forças distribuídas agindo na seção serão equivalentes à força **P**.

Decompondo **P** nas suas componentes **F** e **V**, respectivamente normal e tangencial à seção (Fig. 1.30*c*), temos

$$F = P\cos\theta \qquad V = P\operatorname{sen}\theta \tag{1.12}$$

A força **F** representa a resultante das forças normais distribuídas sobre a seção e a força **V**, a resultante das forças tangenciais (Fig. 1.30*d*). Os valores médios das tensões normal e de cisalhamento correspondentes são obtidos dividindo-se, respectivamente, F e V pela área A_θ da seção:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \qquad \tau = \frac{V}{A_\theta} \tag{1.13}$$

Substituindo F e V de (1.12) em (1.13) e observando da Fig. 1.30*c* que $A_0 = A_\theta \cos\theta$, ou $A_\theta = A_0/\cos\theta$, em que A_0 indica a área de uma seção perpendicular ao eixo da barra, obtemos

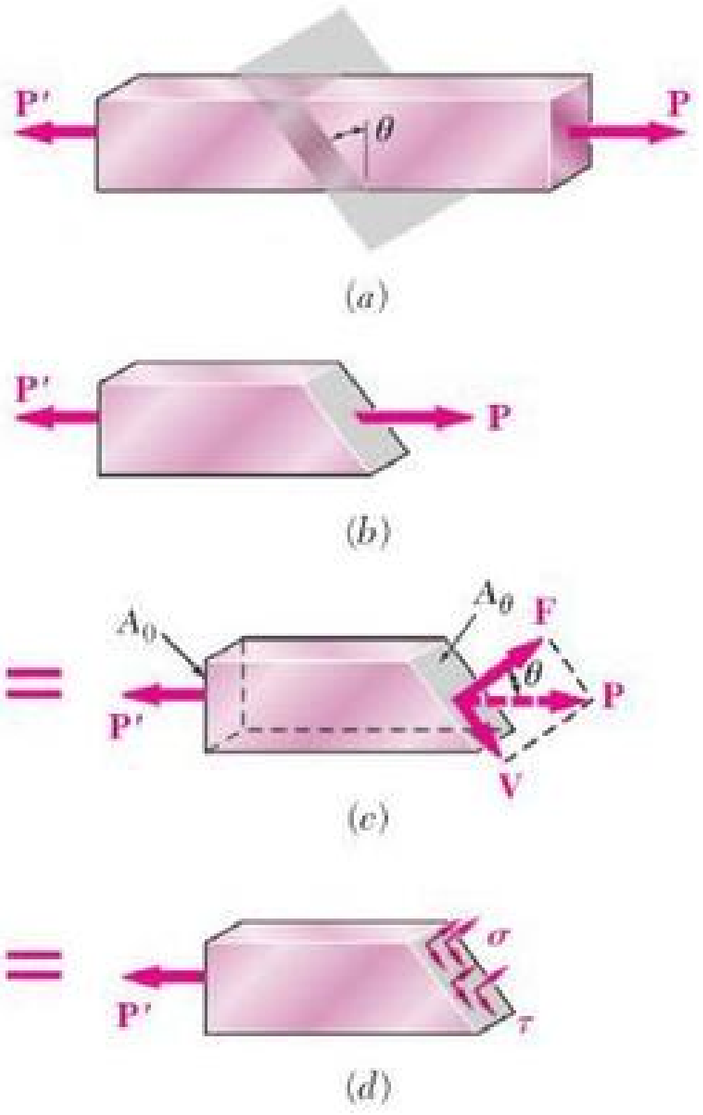
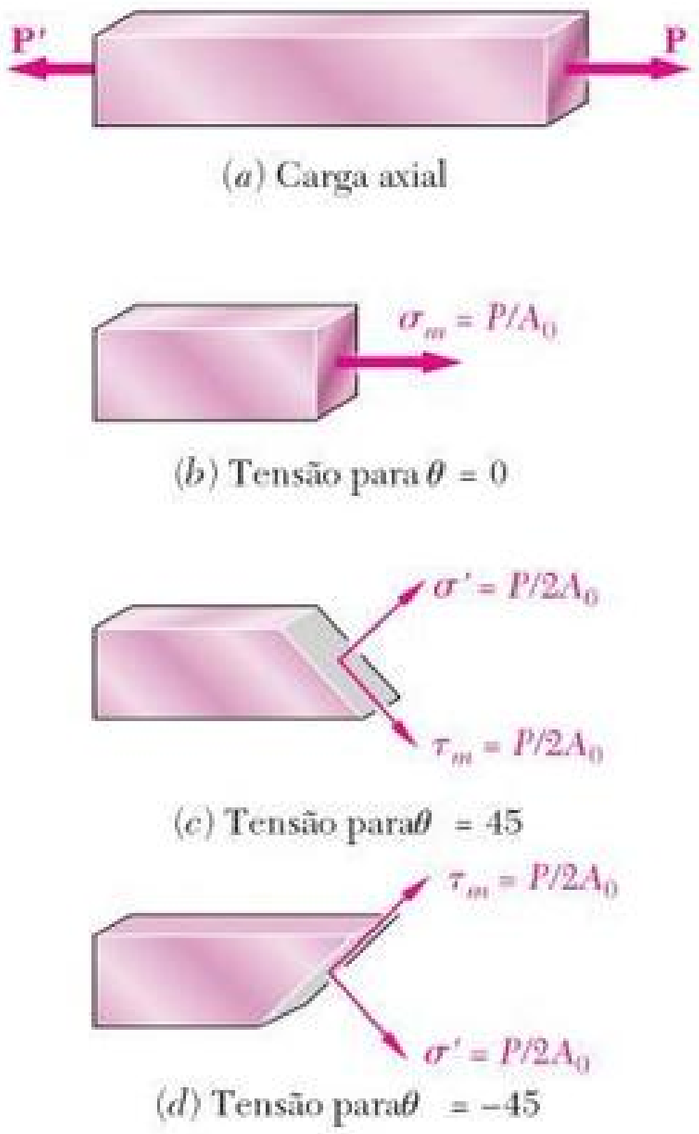


Fig. 1.30

$$\sigma = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} \qquad \tau = \frac{P\ \text{sen}\ \theta}{A_0/\cos\theta}$$

ou

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\ \text{sen}\ \theta\cos\theta \tag{1.14}$$



(*a*) Carga axial

(*b*) Tensão para $\theta = 0$

(*c*) Tensão para $\theta = 45$

(*d*) Tensão para $\theta = -45$

Fig. 1.31

Notamos na primeira das Equações (1.14) que a tensão normal σ é máxima quando $\theta = 0$, ou seja, quando o plano da seção é perpendicular ao eixo do elemento, e que ela se aproxima de zero à medida que θ se aproxima de 90°. Verificamos que o valor de σ quando $\theta = 0$ é

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \tag{1.15}$$

como vimos anteriormente na Seção 1.3. A segunda das Equações (1.14) mostra que a tensão de cisalhamento τ é zero para $\theta = 0$ e $\theta = 90°$ e que para $\theta = 45°$ ela alcança seu valor máximo

$$\tau_m = \frac{P}{A_0}\ \text{sen}\ 45°\cos 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.16}$$

A primeira das Equações (1.14) indica que, quando $\theta = 45°$, a tensão normal σ' também é igual a $P/2A_0$:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0}\cos^2 45° = \frac{P}{2A_0} \tag{1.17}$$

Os resultados obtidos nas Equações (1.15), (1.16) e (1.17) são mostrados graficamente na Fig. 1.31. Notamos que a mesma carga pode produzir uma tensão normal $\sigma_m = P/A_0$ e nenhuma tensão de cisalhamento (Fig. 1.31*b*), ou uma tensão normal e de cisalhamento da mesma intensidade $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$ (Fig. 1.31*c* e *d*), dependendo da orientação da seção.

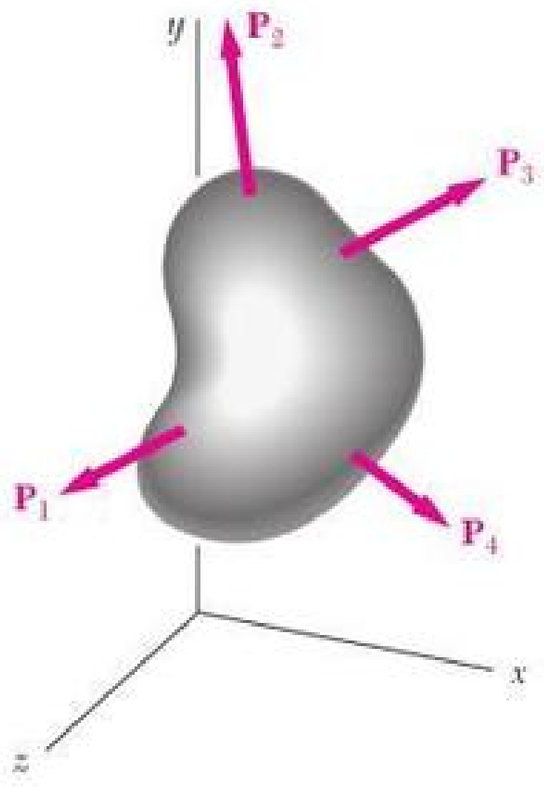


Fig. 1.32

1.12. Tensão sob condições gerais de carregamento; componentes de tensão

Os exemplos das seções anteriores estavam limitados a elementos sob carregamento axial e conexões sob carregamento transversal. Muitos elementos estruturais e de máquinas estão sob condições de carregamento mais complexas.

Considere um corpo sujeito a várias cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ etc. (Fig. 1.32). Para entendermos a condição de tensão criada por essas cargas em algum ponto Q interno ao corpo, vamos primeiro passar um corte através de Q, utilizando um plano paralelo ao plano yz. A parte do corpo à esquerda do corte está sujeita a algumas das cargas originais, e as forças normais e cortantes distribuídas na seção. Vamos indicar por $\Delta\mathbf{F}^x$ e $\Delta\mathbf{V}^x$, respectivamente, as forças normal e cortante agindo sobre uma pequena área ΔA que circunda o ponto Q (Fig. 1.33*a*).

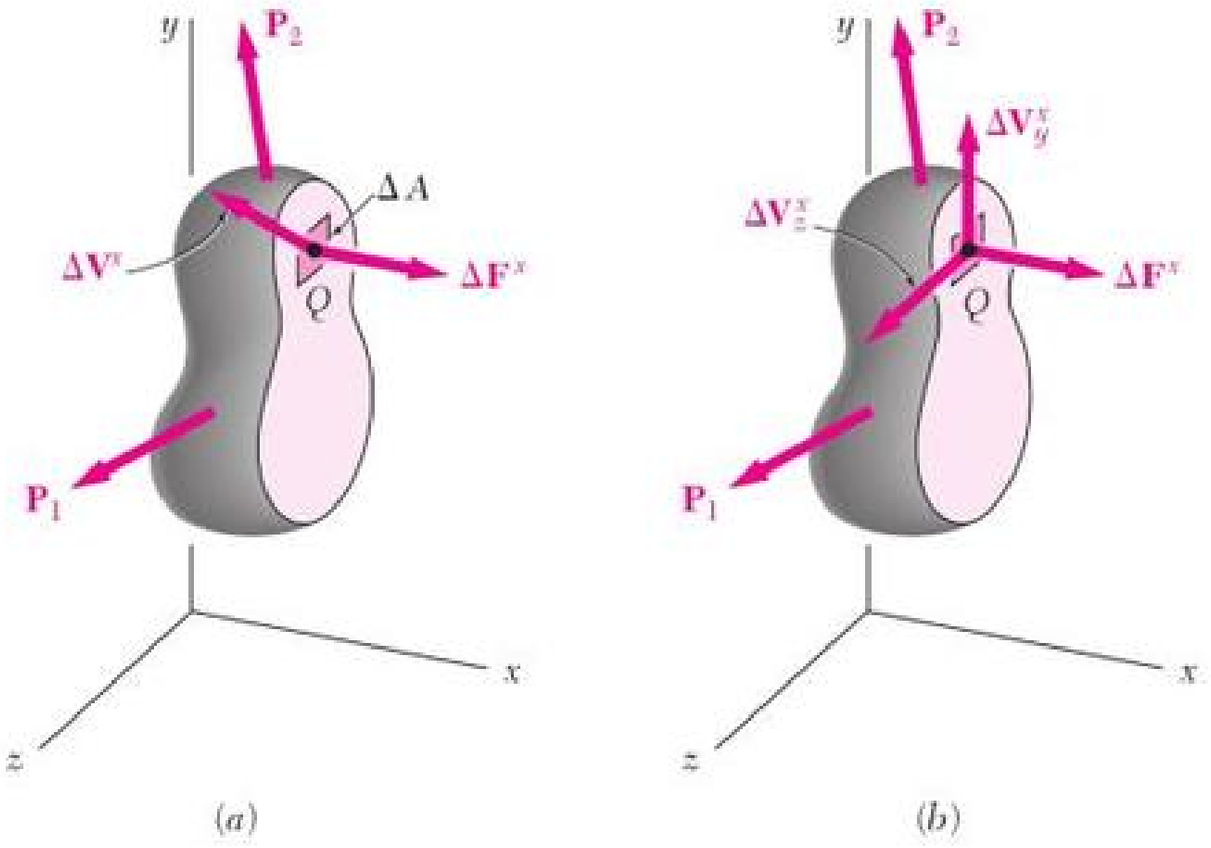


Fig. 1.33

Note que é utilizado o índice superior x para indicar que as forças $\Delta\mathbf{F}^x$ e $\Delta\mathbf{V}^x$ agem sobre uma superfície perpendicular ao eixo x. Enquanto a força normal $\Delta\mathbf{F}^x$ tem uma direção bem definida, a força cortante $\Delta\mathbf{V}^x$ pode ter qualquer direção no plano da seção. Decompomos então $\Delta\mathbf{V}^x$ nas duas componentes de força, $\Delta\mathbf{V}^x_y$ e $\Delta\mathbf{V}^x_z$, em direções paralelas aos eixos y e z, respectivamente (Fig. 1.33*b*). Dividindo agora a intensidade de cada força pela área ΔA e fazendo ΔA aproximar-se de zero, definimos as três componentes de tensão mostradas na Fig. 1.34:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \qquad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V^x_y}{\Delta A} \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V^x_z}{\Delta A} \tag{1.18}$$

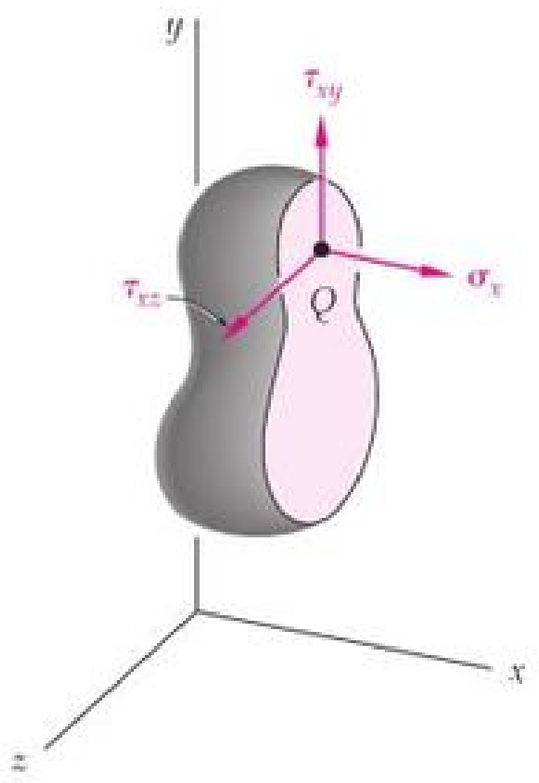


Fig. 1.34

Notamos que o primeiro índice em σ_x, τ_{xy} e τ_{xz} é utilizado para indicar que as tensões em consideração são aplicadas *em uma superfície perpendicular ao eixo x*. O segundo índice em τ_{xy} e τ_{xz} identifica *a direção da componente*. A tensão normal σ_x é positiva, se o sentido do vetor correspondente apontar para a direção positiva de x, isto é, se o corpo estiver sendo tracionado, e negativa em caso contrário. Analogamente, as componentes da tensão de cisalhamento τ_{xy} e τ_{xz} são positivas, se os sentidos dos vetores correspondentes apontarem, respectivamente, nas direções positivas de y e z.

A análise acima também pode ser feita considerando-se a parte do corpo localizada à direita do plano vertical através de Q (Fig. 1.35). As mesmas intensidades, mas com sentidos opostos, são obtidos para as forças normal e cortante $\Delta\mathbf{F}^x$, $\Delta\mathbf{V}^x_y$ e $\Delta\mathbf{V}^x_z$. Portanto, os mesmos valores são também obtidos para as componentes de tensão correspondentes, mas, como a seção na Fig. 1.35 agora está voltada para o lado *negativo do eixo x*, um sinal positivo para σ_x indicará que o sentido do vetor correspondente aponta na *direção negativa de x*. Analogamente, sinais positivos para τ_{xy} e τ_{xz} indicarão que os sentidos dos vetores correspondentes apontam, respectivamente, nas direções negativas de y e z, como mostra a Fig. 1.35.

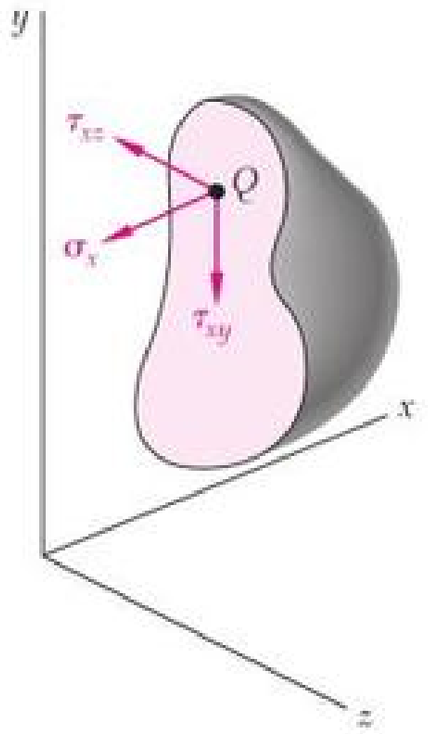


Fig. 1.35

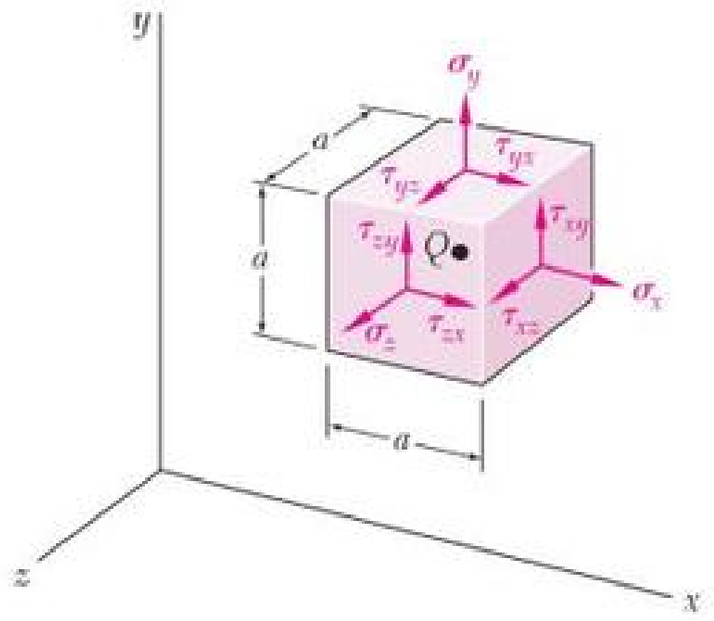


Fig. 1.36

Passando um corte através de Q paralelo ao plano zx, definimos da mesma maneira as componentes da tensão σ_y, τ_{yz} e τ_{yx}. Finalmente, um corte através de Q paralela ao plano xy resulta nas componentes σ_z, τ_{zx} e τ_{zy}.

Para facilitar a visualização do estado de tensão no ponto Q, consideraremos um pequeno cubo de lado a centrado em Q e as tensões que atuam em cada uma das seis faces desse cubo (Fig. 1.36). As componentes de tensão mostradas na figura são σ_x, σ_y e σ_z, que representam as tensões normais nas faces perpendiculares, respectivamente, aos eixos x, y e z e às seis componentes de tensão de cisalhamento τ_{xy}, τ_{xz} etc. Recordamos que, de acordo com a definição das componentes de tensão de cisalhamento, τ_{xy} representa a componente y da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo x, enquanto τ_{yx} representa a componente x da tensão de cisalhamento que atua na face perpendicular ao eixo y. Note que somente três faces do cubo são realmente visíveis na Fig. 1.36 e que componentes de tensão iguais e opostas atuam nas faces ocultas. Embora as tensões que atuam nas faces do cubo diferem ligeiramente das tensões em Q, o erro envolvido é pequeno e desaparece na medida em que o lado a do cubo aproxima-se de zero.

Vamos deduzir agora relações importantes entre as componentes de tensão de cisalhamento. Consideremos o diagrama de corpo livre do pequeno cubo centrado no ponto Q (Fig. 1.37). As forças normal e cortante que atuam nas várias faces do cubo são obtidas multiplicando-se as componentes de tensão correspondentes pela área ΔA de cada face. Escreveremos primeiro as três equações de equilíbrio a seguir:

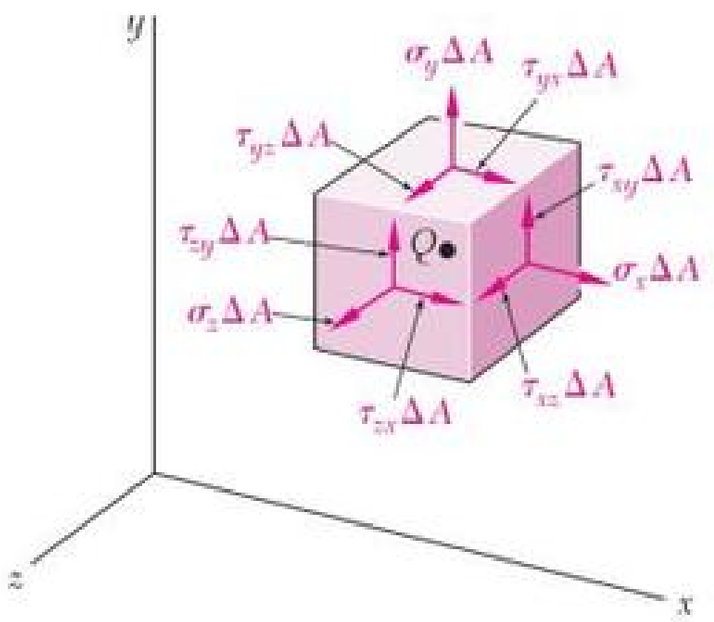


Fig. 1.37

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{1.19}$$

Como há forças iguais e opostas às forças mostradas na Fig. 1.37 que atuam nas faces ocultas do cubo, está claro que as Equações (1.19) ficam satisfeitas. Considerando agora os momentos das forças em relação aos eixos Qx', Qy' e Qz' desenhados a partir de Q em direções, respectivamente, paralelas aos eixos x, y e z, temos as três equações adicionais

$$\Sigma M_{x'} = 0 \qquad \Sigma M_{y'} = 0 \qquad \Sigma M_{z'} = 0 \tag{1.20}$$

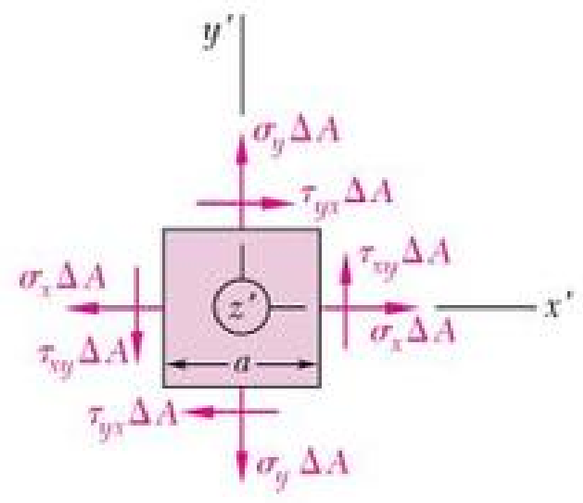


Fig. 1.38

Utilizando a projeção no plano $x'y'$ (Fig. 1.38), notamos que somente as forças de cisalhamento têm momentos, em relação ao eixo z, diferentes de zero. Essas forças formam dois conjugados, um de momento anti-horário (positivo) $(\tau_{xy}\,\Delta A)a$, e outro de momento horário (negativo) $-(\tau_{yx}\,\Delta A)a$. Da última das três Equações (1.20) resulta, então,

$$+\circlearrowleft \Sigma M_z = 0: \qquad (\tau_{xy}\,\Delta A)a - (\tau_{yx}\,\Delta A)a = 0$$

da qual concluímos que

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.21}$$

A relação obtida mostra que a componente y da tensão de cisalhamento aplicada à face perpendicular ao eixo x é igual a componente x da tensão de ci-

salhamento aplicada sobre a face perpendicular ao eixo y. Das duas Equações restantes (1.20), determinamos de maneira semelhante as relações

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.22}$$

Concluímos das Equações (1.21) e (1.22) que são necessárias somente seis componentes de tensão para definir o estado de tensão em um determinado ponto Q em lugar das nove componentes consideradas originalmente. Essas seis componentes são $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ e τ_{zx}. Notamos também que, em um determinado ponto, *o cisalhamento não pode ocorrer apenas em um plano*; deve sempre existir uma tensão de cisalhamento igual em outro plano perpendicular ao primeiro. Por exemplo, considerando novamente o parafuso da Fig. 1.29 e um pequeno cubo no centro Q do parafuso (Fig. 1.39*a*), vemos que tensões de cisalhamento de igual intensidade devem estar atuando nas duas faces horizontais do cubo e nas duas faces perpendiculares às forças **P** e **P**′ (Fig. 1.39*b*).

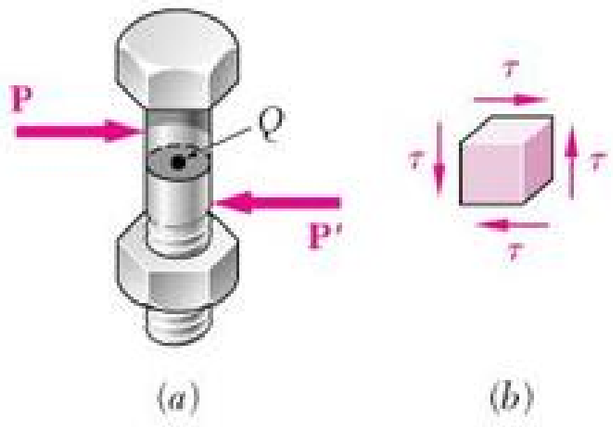


Fig. 1.39

Antes de concluirmos nossa discussão sobre as componentes de tensão, vamos considerar novamente o caso de um elemento sob carga axial. Se considerarmos um pequeno cubo com faces, respectivamente, paralelas às faces do elemento e lembrando os resultados obtidos na Seção 1.11, verificaremos que o estado de tensão no elemento pode ser descrito como mostra a Fig. 1.40*a*; as únicas tensões são as normais σ_x que atuam nas faces do cubo perpendiculares ao eixo x. No entanto, se o pequeno cubo for girado de 45° em torno do eixo z de modo que sua nova orientação corresponda à orientação das seções consideradas na Fig. 1.31*c* e *d*, concluímos que as tensões normal e de cisalhamento de igual intensidade estão atuando nas quatro faces do cubo (Fig. 1.40*b*). Observamos então que a mesma condição de carregamento pode levar a diferentes interpretações do estado de tensão em um determinado ponto, dependendo da orientação do elemento considerado. Discutiremos mais sobre esse assunto no Capítulo 7.

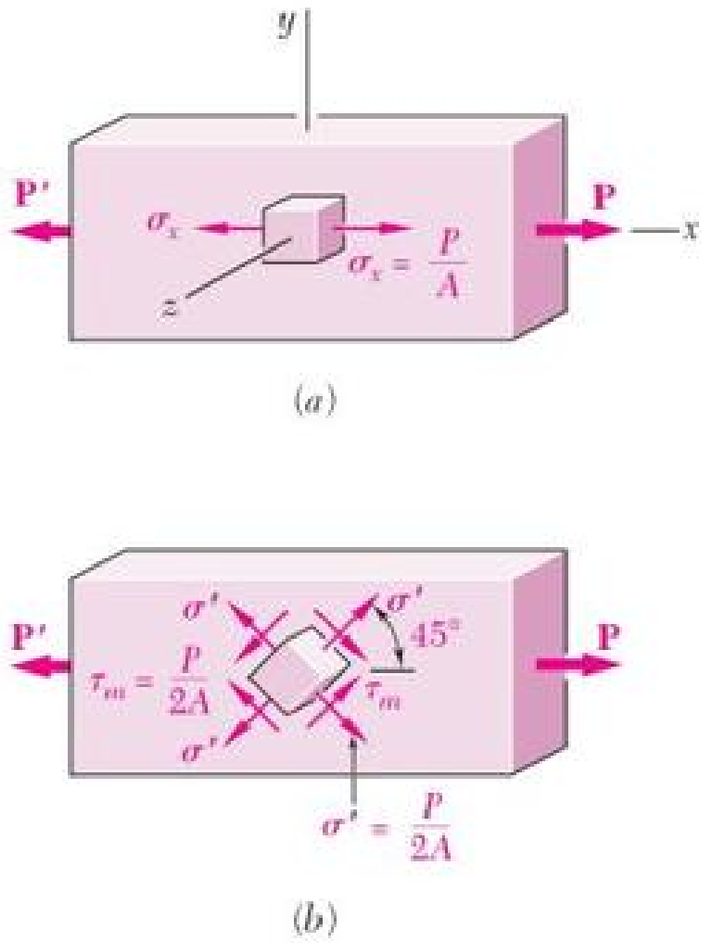


Fig. 1.40

1.13. Considerações de projeto

Nas seções anteriores você aprendeu a determinar as tensões em barras, parafusos e pinos sob condições simples de carregamento. Nos próximos capítulos você aprenderá a determinar tensões em situações mais complexas. No entanto, em aplicações de engenharia, a determinação das tensões raramente é o objetivo final. Ao contrário, o conceito de tensões é utilizado pelos engenheiros como auxílio na sua mais importante tarefa, ou seja, o projeto de estruturas e máquinas que executarão determinada função com segurança e economia.

a. Determinação do limite de resistência de um material. Um elemento importante a ser considerado por um projetista é como o material selecionado se comportará sob um carregamento. Para um determinado material, isso é determinado executando-se testes específicos em corpos de prova preparados com aquele material. Por exemplo, um corpo de prova de aço pode ser preparado e colocado em uma máquina de ensaios de laboratório para ser submetido à força axial de tração centrada conhecida, conforme descrito na Seção 2.3. À medida que se aumenta a intensidade da força, são medidas várias alterações no corpo de prova, como, alterações em seu comprimento e diâmetro. Eventualmente, pode-se atingir a máxima força a ser aplicada ao

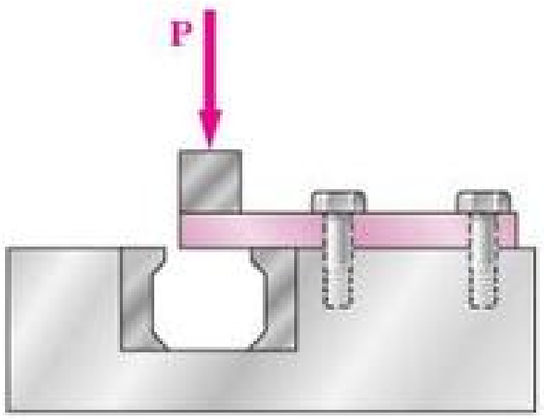


Fig. 1.41

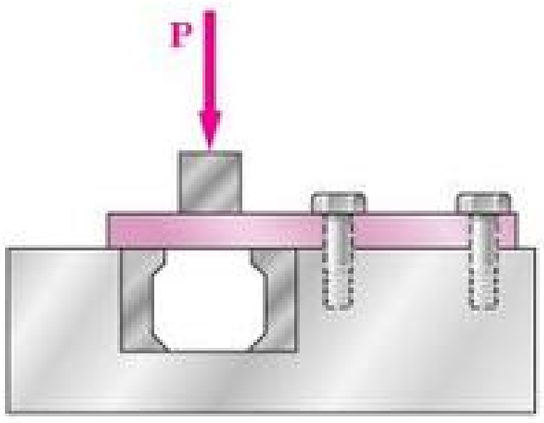


Fig. 1.42

corpo de prova e este se romper ou começar a suportar menos carga. Essa força máxima é chamada de *carga-limite* do corpo de prova, também denominada P_L. Como a carga aplicada é centrada, podemos dividir o valor da carga-limite pela área da seção transversal original da barra para obter o *limite da tensão normal* do material utilizado. Essa tensão, também conhecida como *limite de resistência à tração* do material, é

$$\sigma_L = \frac{P_L}{A} \tag{1.23}$$

Há disponíveis vários procedimentos de ensaio para determinar o *limite da tensão de cisalhamento*, ou *limite de resistência em cisalhamento*, de um material. O procedimento mais comumente utilizado envolve a torção de um tubo circular (Seção 3.5). Um procedimento mais direto, embora menos preciso, consiste em prender uma barra retangular ou redonda e, com uma *ferramenta de corte* (Fig. 1.41), aplicar uma carga P crescente até ser obtida a *carga-limite* P_L para cisalhamento simples. Se a extremidade livre do corpo de prova se apoiar em ambas as superfícies de corte (Fig. 1.42), será obtida a carga-limite para cisalhamento duplo. Em qualquer dos casos, o limite da tensão de cisalhamento τ_L é obtido dividindo-se o valor da carga-limite pela área total sobre a qual ocorreu o corte. Lembramos que, no caso de cisalhamento simples, essa é a área da seção transversal A do corpo de prova, enquanto em cisalhamento duplo ela é igual a duas vezes a área da seção transversal.

b. Carga admissível e tensão admissível; coeficiente de segurança. A carga máxima que um elemento estrutural ou um membro de máquina poderá suportar sob condições normais de utilização é consideravelmente menor que o valor da *carga-limite*. Essa carga menor é conhecida como *carga admissível* e, às vezes, como *carga de trabalho* ou *carga de projeto*. Somente uma fração do limite da capacidade de carga do elemento é utilizada quando aplicada à carga admissível. A parte restante da capacidade de carga do elemento é mantida na reserva para garantir seu desempenho com segurança. A relação entre a carga-limite e a carga admissível é utilizada para definir o *coeficiente de segurança*.† Temos

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{carga-limite}}{\text{carga admissível}} \tag{1.24}$$

Uma definição alternativa do coeficiente de segurança é dada com base no uso de tensões:

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{limite de tensão}}{\text{tensão admissível}} \tag{1.25}$$

As duas expressões dadas para o coeficiente de segurança nas Equações (1.24) e (1.25) são idênticas quando existe uma relação linear entre a carga e a tensão. No entanto, na maioria das aplicações de engenharia, essa relação deixa de ser linear à medida em que a carga se aproxima de seu valor-limite e o coeficiente de segurança obtido da Equação (1.25) não proporciona uma

†Em alguns campos da engenharia, principalmente na engenharia aeronáutica, é usada a *margem de segurança* em lugar do coeficiente de segurança. A margem de segurança é definida como o coeficiente de segurança menos um; ou seja, margem de segurança $= C.S. - 1{,}00$.

verdadeira avaliação da segurança de um determinado projeto. Contudo, o *método de projeto da tensão* admissível, com base no uso da Equação (1.25), é amplamente utilizado.

c. Seleção de um coeficiente de segurança apropriado. A seleção do coeficiente de segurança a ser utilizado para várias aplicações é uma das mais importantes tarefas da engenharia. No entanto, se for escolhido um coeficiente de segurança muito pequeno, a possibilidade de falha se tornará grande e inaceitável; em contrapartida, se for escolhido um coeficiente de segurança desnecessariamente grande, o resultado será um projeto antieconômico e não funcional. A escolha do coeficiente de segurança apropriado para uma aplicação requer senso de engenharia com base em muitas considerações, como as seguintes:

1. *Variações que podem ocorrer nas propriedades do elemento sob consideração.* A composição, a resistência e as dimensões do elemento estão todas sujeitas a pequenas variações durante a fabricação. Além disso, as propriedades do material podem ser alteradas e as tensões residuais introduzidas com o aquecimento ou deformação que podem ocorrer durante a fabricação, a armazenagem, o transporte ou a construção.
2. *Número de cargas que podem ser esperadas durante a vida da estrutura ou máquina.* Para a maioria dos materiais, a tensão-limite diminui na medida em que o número de operações de carga aumenta. Esse fenômeno é conhecido como *fadiga* e, se for ignorado, pode resultar em falha súbita (ver a Seção 2.7).
3. *Tipo de carregamento planejado para o projeto ou que pode ocorrer no futuro.* Poucas são as cargas que podem ser conhecidas com exatidão total — a maioria das cargas de projeto é estimativa de engenharia. Além disso, alterações futuras ou mudanças no uso podem introduzir alterações na carga real. Coeficientes de segurança maiores são também necessários para carregamentos dinâmicos, cíclicos ou impulsivos.
4. *Tipo de falha que pode ocorrer.* Materiais frágeis falham subitamente, em geral sem uma indicação prévia de que o colapso é iminente. Não obstante, materiais dúcteis, como o aço utilizado em estruturas, normalmente passam por uma deformação substancial chamada de *escoamento* antes de falhar, proporcionando assim um aviso de que existe sobrecarga. No entanto, a maioria das falhas por flambagem ou por perda de estabilidade é súbita, seja o material frágil ou não. Quando existe a possibilidade de falha súbita, deverá ser utilizado um coeficiente de segurança maior que aquele utilizado quando a falha é precedida por sinais óbvios de aviso.
5. *Incerteza em virtude de métodos de análise.* Todos os métodos de análise são realizados com base em certas hipóteses simplificadoras cujos resultados fazem as tensões calculadas aproximarem-se das tensões reais.
6. *Deterioração que pode ocorrer no futuro em razão da falta de manutenção ou devido às causas naturais imprevisíveis.* Um coeficiente de segurança maior é necessário em locais em que as condições como corrosão e envelhecimento são difíceis de controlar ou até de descobrir.
7. *Importância de um determinado elemento para a integridade de toda a estrutura.* Contraventamentos e elementos secundários podem, em muitos casos, ser projetados com um coeficiente de segurança menor que aquele utilizado para elementos principais.

Além dessas considerações, há uma outra referente ao risco de vida e de danos materiais que uma falha poderia produzir. Nos casos em que uma falha não causaria risco de vida e somente risco mínimo de danos materiais, pode ser considerado o uso de um coeficiente de segurança menor. Finalmente, há a consideração prática de que, a menos que seja utilizado um projeto cuidadoso, com um coeficiente de segurança baixo, uma estrutura ou máquina pode não executar a função para a qual ela foi projetada. Altos coeficientes de segurança, por exemplo, podem ter um efeito inaceitável no peso de um avião.

Para a maioria das aplicações estruturais e de máquinas, coeficientes de segurança são definidos por especificações de projeto ou normas técnicas redigidas por comitês de engenheiros experientes que trabalham em conjunto com sociedades profissionais, com indústrias ou com agências federais, estaduais ou municipais. Exemplos de tais especificações de projeto e normas técnicas são

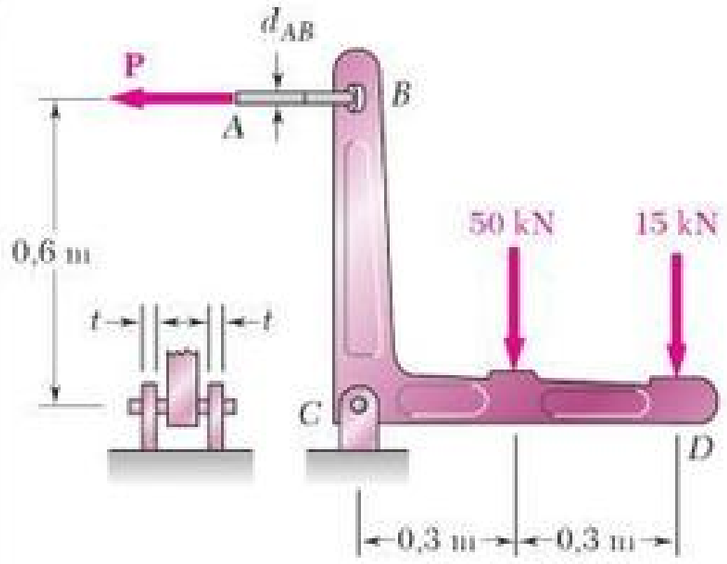
1. *Aço*: American Institute of Steel Construction, Especificações para Construção com aço Estrutural
2. *Concreto*: American Concrete Institute, Código de Requisitos para Construção em Concreto Estrutural
3. *Madeira*: American Forest and Paper Association, Especificações Nacionais para Construção em Madeira
4. *Pontes rodoviárias*: American Association of State Highway Officials, Especificações Padrão para Pontes Rodoviárias

***d. Coeficiente de projeto para carga e resistência.** Conforme vimos, o método da tensão admissível exige que todas as incertezas associadas com o projeto de uma estrutura ou elemento de máquina sejam agrupadas em um único coeficiente de segurança. Um método alternativo de projeto, que está ganhando aceitação principalmente entre engenheiros estruturais, torna possível, com o uso de três diferentes coeficientes, distinguir entre as incertezas associadas com a própria estrutura e aquelas associadas com a carga que ela deve suportar por projeto. Esse método, conhecido como *Load and Resistance Factor Design — LRFD* (Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência), permite ao projetista distinguir melhor entre incertezas associadas a *carga externa*, P_E, ou seja, com a carga a ser suportada pela estrutura, e a *carga permanente*, P_P, ou seja, com o peso da parte da estrutura contribuindo para a carga total.

Quando utilizado esse método de projeto, deverá ser determinado primeiro o *limite de carga*, P_L, da estrutura, ou seja, a carga na qual a estrutura deixa de ser útil. O projeto proposto é então aceitável se for satisfeita a seguinte inequação:

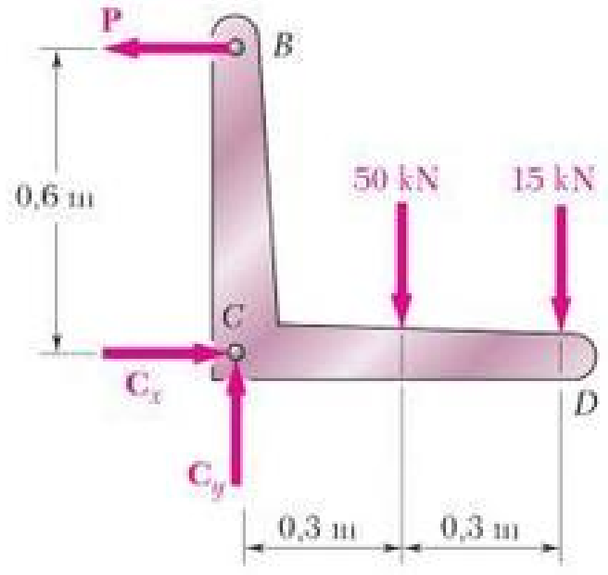
$$\gamma_P P_P + \gamma_E P_E \leq \phi P_L \tag{1.26}$$

O coeficiente ϕ é conhecido como *coeficiente de resistência*: ele está relacionado às incertezas associadas com a própria estrutura e normalmente será menor que 1. Os coeficientes γ_P e γ_E são chamados de *coeficientes de carga*; eles estão relacionados às incertezas associadas, respectivamente, com a carga permanente e a carga externa e normalmente serão maiores que 1, com γ_E geralmente maior que γ_P. Embora sejam incluídos alguns exemplos ou problemas propostos utilizando LRFD neste capítulo e nos Capítulos 5 e 10, será utilizado neste texto o método de projeto da tensão admissível.



PROBLEMA RESOLVIDO 1.3

São aplicadas duas forças ao suporte *BCD* mostrado na figura. (*a*) Sabendo que a barra de controle *AB* deve ser feita de aço e ter um limite de tensão normal de 600 MPa, determine o diâmetro da barra para o qual o coeficiente de segurança com relação à falha seja igual a 3,3. (*b*) Sabendo que o pino em *C* deve ser feito de um aço com um limite de tensão de cisalhamento de 350 MPa, determine o diâmetro do pino *C* para o qual o coeficiente de segurança com relação ao cisalhamento seja também igual a 3,3. e (*c*) Determine a espessura necessária para as barras de apoio em *C*, sabendo que a tensão de esmagamento admissível do aço utilizado é 300 MPa.



SOLUÇÃO

Corpo livre: o suporte inteiro. A reação em *C* é representada por seus componentes $\mathbf{C}_x$ e $\mathbf{C}_y$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad P(0{,}6\text{ m}) - (50\text{ kN})(0{,}3\text{ m}) - (15\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) = 0 \qquad P = 40\text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0: \qquad C_x = 40\text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad C_y = 65\text{ kN}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76{,}3\text{ kN}$$

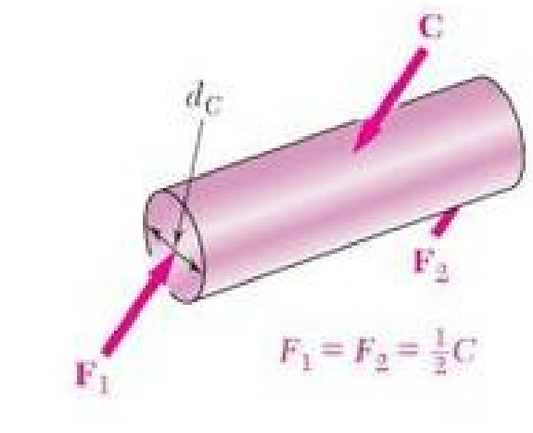
***a*. Barra de controle *AB*.** Como o coeficiente de segurança deve ser 3,3, a tensão admissível é

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_L}{C.S.} = \frac{600\text{ MPa}}{3{,}3} = 181{,}8\text{ MPa}$$

Para $P = 40$ kN, a área da seção transversal necessária é

$$A_{nec} = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{40\text{ kN}}{181{,}8\text{ MPa}} = 220 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

$$A_{nec} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 220 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \qquad d_{AB} = 16{,}74\text{ mm} \blacktriangleleft$$



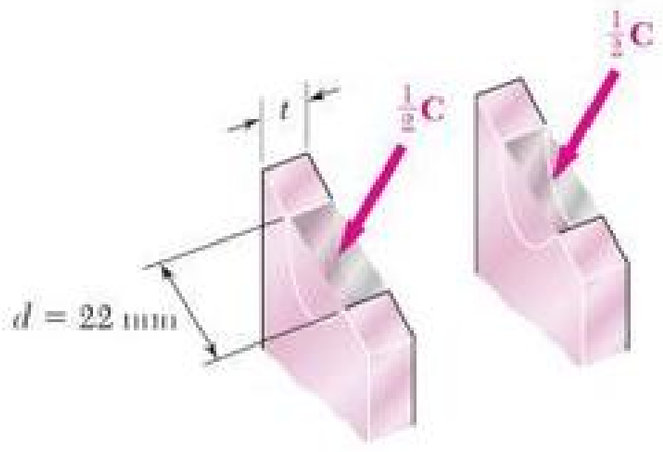
***b*. Cisalhamento no pino *C*.** Para um coeficiente de segurança de 3,3, temos

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_L}{C.S.} = \frac{350\text{ MPa}}{3{,}3} = 106{,}1\text{ MPa}$$

Como o pino está sob corte duplo, temos

$$A_{nec} = \frac{C/2}{\tau_{adm}} = \frac{(76{,}3\text{ kN})/2}{106{,}1\text{ MPa}} = 360\text{ mm}^2$$

$$A_{nec} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 360\text{ mm}^2 \qquad d_C = 21{,}4\text{ mm} \quad \text{Utilizamos: } d_C = 22\text{ mm} \blacktriangleleft$$

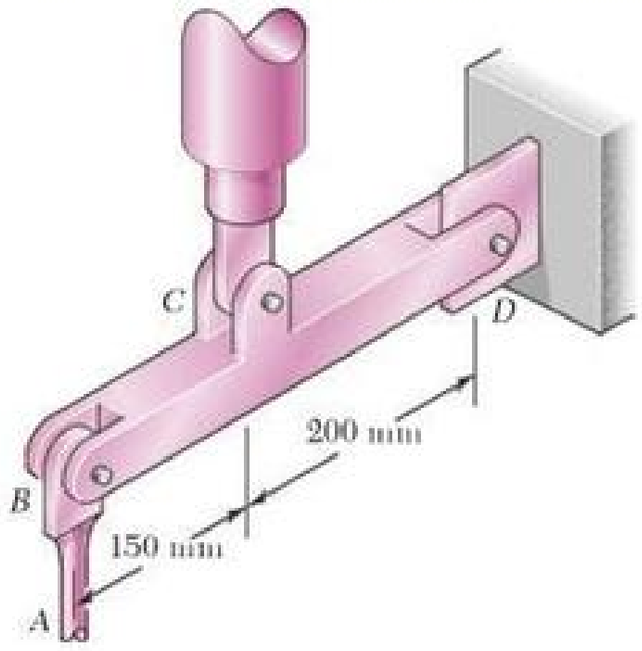


O próximo pino maior disponível tem um diâmetro de 22 mm e deverá ser utilizado.

***c*. Esmagamento em *C*.** Utilizando $d = 22$ mm, a área nominal de esmagamento de cada barra é $22t$. Como a força aplicada em cada suporte é $C/2$ e a tensão de esmagamento admissível é 300 MPa, temos

$$A_{nec} = \frac{C/2}{\sigma_{adm}} = \frac{(76{,}3\text{ kN})/2}{300\text{ MPa}} = 127{,}2\text{ mm}^2$$

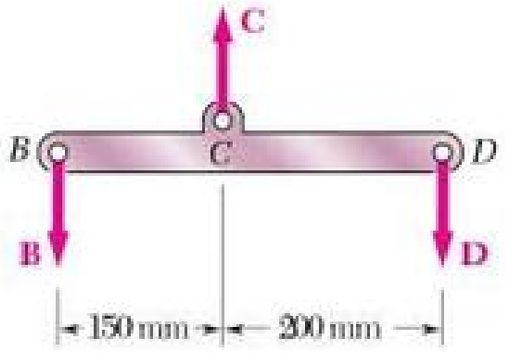
Assim, $22t = 127{,}2$ $\qquad t = 5{,}78$ mm $\qquad$ Utilizamos: $t = 6$ mm ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 1.4

A viga rígida BCD está presa por parafusos a uma barra de controle em B, a um cilindro hidráulico em C e a um suporte fixo em D. Os diâmetros dos parafusos utilizados são: $d_B = d_D = 9{,}5$ mm, $d_C = 12{,}7$ mm. Cada parafuso age sob cisalhamento duplo e é feito de um aço para o qual o limite da tensão de cisalhamento é $\tau_L = 275$ MPa. A barra de controle AB tem um diâmetro $d_A = 11$ mm e é feita de um aço para o qual o limite da tensão de tração é $\sigma_L = 414$ MPa. Se o coeficiente de segurança mínimo deve ser 3,0 para toda a estrutura, determine a maior força ascendente que pode ser aplicada pelo cilindro hidráulico em C.

SOLUÇÃO



O coeficiente de segurança com relação à falha deve ser 3,0 ou mais em cada um dos três parafusos e na barra de controle. Esses quatro critérios independentes serão considerados separadamente.

Corpo livre: viga *BCD*. Primeiro determinamos a força C em função das forças B e D.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad B(350\text{ mm}) - C(200\text{ mm}) = 0 \quad C = 1{,}750B \qquad (1)$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -D(350\text{ mm}) + C(150\text{ mm}) = 0 \quad C = 2{,}33D \qquad (2)$$

Barra de controle. Para um coeficiente de segurança de 3,0, temos

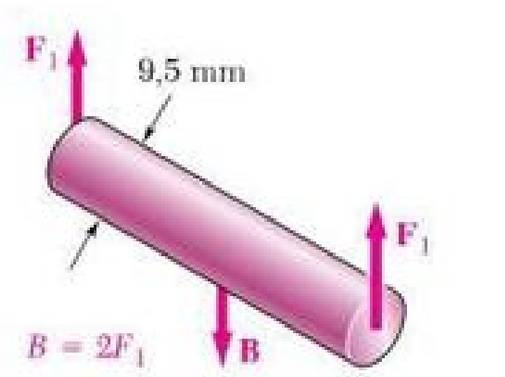
$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_L}{C.S.} = \frac{414\text{ MPa}}{3{,}0} = 138\text{ MPa}$$

A força admissível na barra de controle é

$$B = \sigma_{adm}(A) = (138\text{ MPa})\tfrac{1}{4}\pi\,(11\text{ mm})^2 = 13{,}11\text{ kN}$$

Utilizando a Equação (1), determinamos o maior valor admissível C:

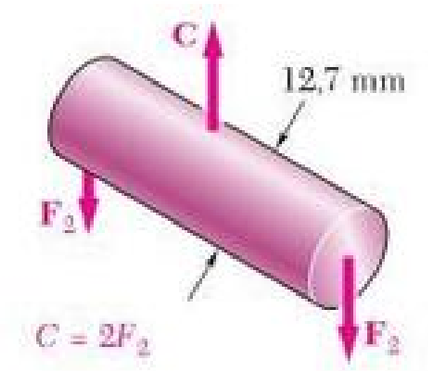
$$C = 1{,}750B = 1{,}750(13{,}11\text{ kN}) \qquad C = 22{,}94\text{ kN} \triangleleft$$



Parafuso em *B*. $\tau_{adm} = \tau_L/C.S. = (275\text{ MPa})/3 = 91{,}67$ MPa. Como o parafuso está sob corte duplo, o valor admissível da força **B** aplicada no parafuso é

$$B = 2F_1 = 2(\tau_{adm}A) = 2(91{,}67\text{ MPa})(\tfrac{1}{4}\pi)(9{,}5\text{ mm})^2 = 13{,}00\text{ kN}$$

Da Equação (1): $C = 1{,}750B = 1{,}750(13{,}00\text{ kN}) \quad C = 22{,}75\text{ kN} \triangleleft$



Parafuso em *D*. Como esse parafuso é igual ao parafuso B, a força admissível é $D = B = 13{,}00$ kN. Da Equação (2):

$$C = 2{,}33D = 2{,}33(13{,}00\text{ kN}) \qquad C = 30{,}29\text{ kN} \triangleleft$$

Parafuso em *C*. Temos novamente $\tau_{adm} = 91{,}67$ MPa e escrevemos

$$C = 2F_2 = 2(\tau_{adm}A) = 2(91{,}67\text{ MPa})(\tfrac{1}{4}\pi)(12{,}7\text{ mm})^2 \quad C = 23{,}22\text{ kN} \triangleleft$$

Resumo. Encontramos separadamente quatro valores máximos admissíveis para a força C. Para satisfazermos a todos esses critérios, devemos escolher o menor valor, ou seja:

$$C = 22{,}75\text{ kN} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

1.29 A carga **P** de 6 227 N é suportada por dois elementos de madeira de seção transversal uniforme unidos pela emenda colada mostrada na figura. Determine as tensões normal e de cisalhamento na emenda colada.

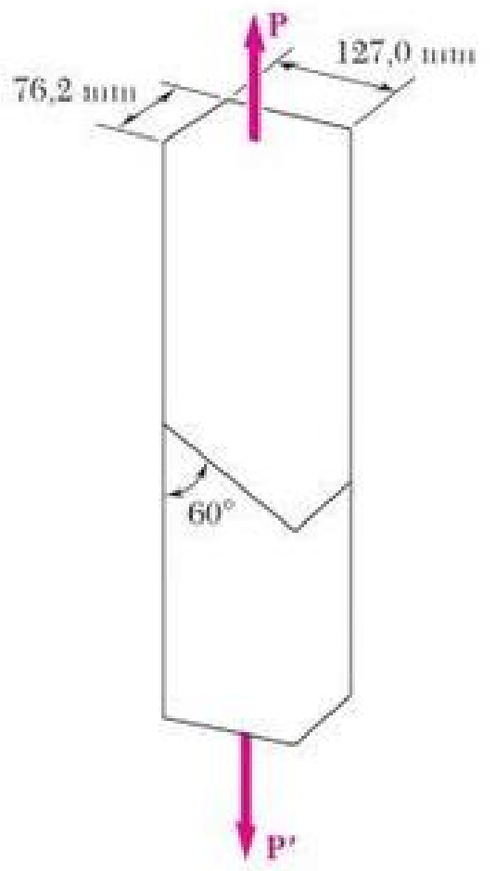


Fig. P1.29 e *P1.30*

1.30 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que a máxima tensão de cisalhamento admissível na emenda é 500 kPa, determine (*a*) a maior carga **P** que pode ser suportada com segurança e (*b*) a tensão de tração correspondente na emenda.

1.31 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que $P = 11$ kN, determine as tensões normal e de cisalhamento na emenda colada.

1.32 Dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma emenda colada como mostra a figura. Sabendo que a máxima tensão de tração admissível na emenda é 560 kPa, determine (*a*) a maior carga **P** que pode ser aplicada com segurança e (*b*) a tensão de cisalhamento correspondente na emenda.

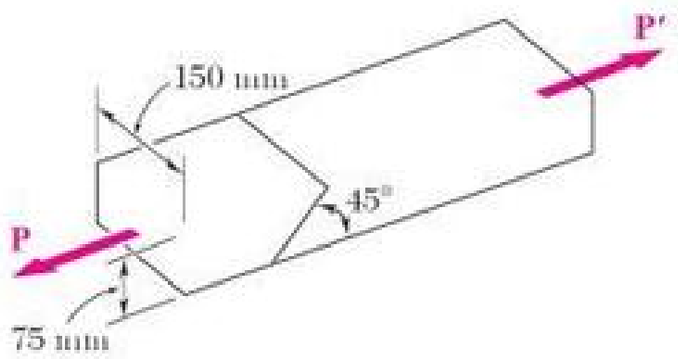


Fig. P1.31 e P1.32

1.33 Uma carga **P** centrada é aplicada ao bloco de granito mostrado na figura. Sabendo que o valor máximo resultante da tensão de cisalhamento no bloco é 17,24 MPa, determine (*a*) a intensidade de **P**, (*b*) a orientação da superfície na qual ocorre a tensão de cisalhamento máxima, (*c*) a tensão normal que atua na superfície e (*d*) o valor máximo da tensão normal no bloco.

1.34 Uma carga **P** de 1 070 kN é aplicada ao bloco de granito mostrado na figura. Determine o valor máximo resultante da (*a*) tensão normal e (*b*) tensão de cisalhamento. Especifique a orientação do plano no qual ocorre cada um desses valores máximos.

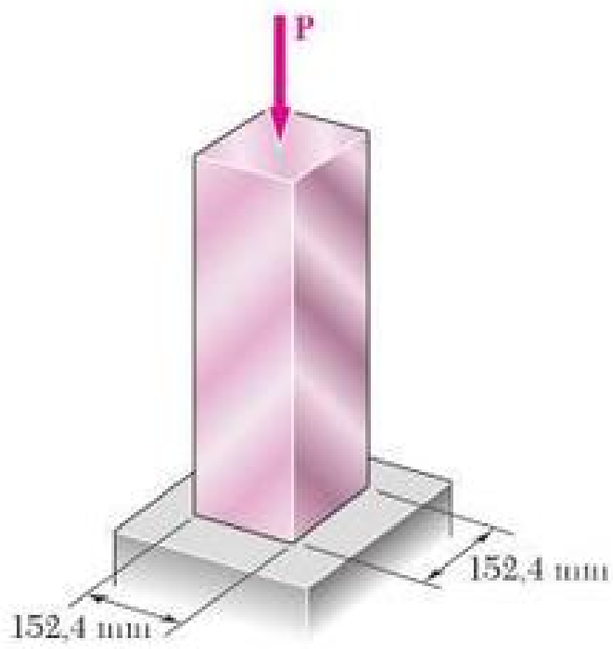


Fig. P1.33 e *P1.34*

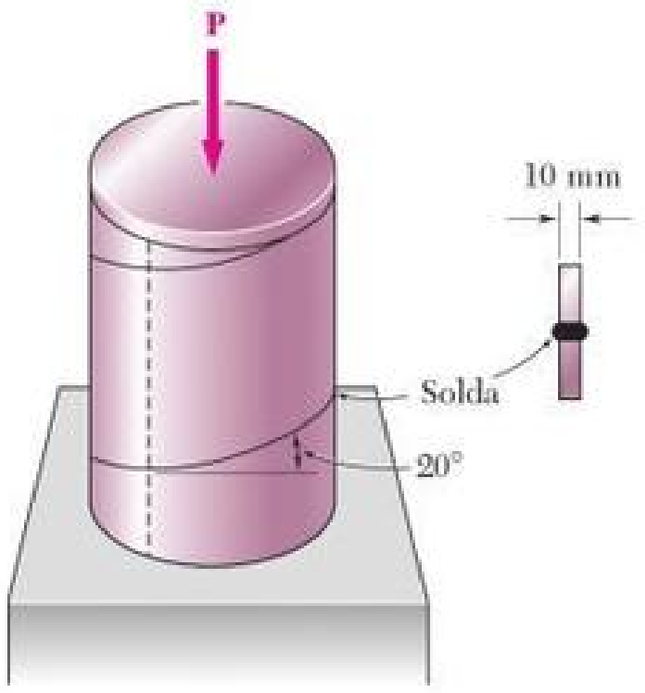


Fig. P1.35 e P1.36

1.35 Um tubo de aço com 400 mm de diâmetro externo é fabricado a partir de uma chapa de aço com espessura de 10 mm soldada ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 20° com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que as tensões normal e de cisalhamento máximas admissíveis nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda são $\sigma = 60$ MPa e $\tau = 36$ MPa, determine a intensidade **P** da maior força axial que pode ser aplicada ao tubo.

1.36 Um tubo de aço com 400 mm de diâmetro externo é fabricado a partir de uma chapa de aço com espessura de 10 mm soldada ao longo de uma hélice que forma um ângulo de 20° com um plano perpendicular ao eixo do tubo. Sabendo que é aplicada ao tubo uma força **P** axial de 300 kN, determine as tensões normal e de cisalhamento nas direções, respectivamente, normal e tangencial à solda.

1.37 Um aro em forma de losango de aço *ABCD* com comprimento de 1,2 m e com 10 mm de diâmetro é colocado para envolver uma barra de alumínio *AC* com 24 mm de diâmetro, conforme mostra a figura. São utilizados os cabos *BE* e *DF*, cada um com 12 mm de diâmetro, para aplicar a carga **Q**. Sabendo que o limite de resistência do aço utilizado para o aro e os cabos é 480 MPa e que o limite de resistência do alumínio utilizado na barra é 260 MPa, determine a máxima carga **Q** que pode ser aplicada quando se adota um coeficiente de segurança 3 para todos os elementos.

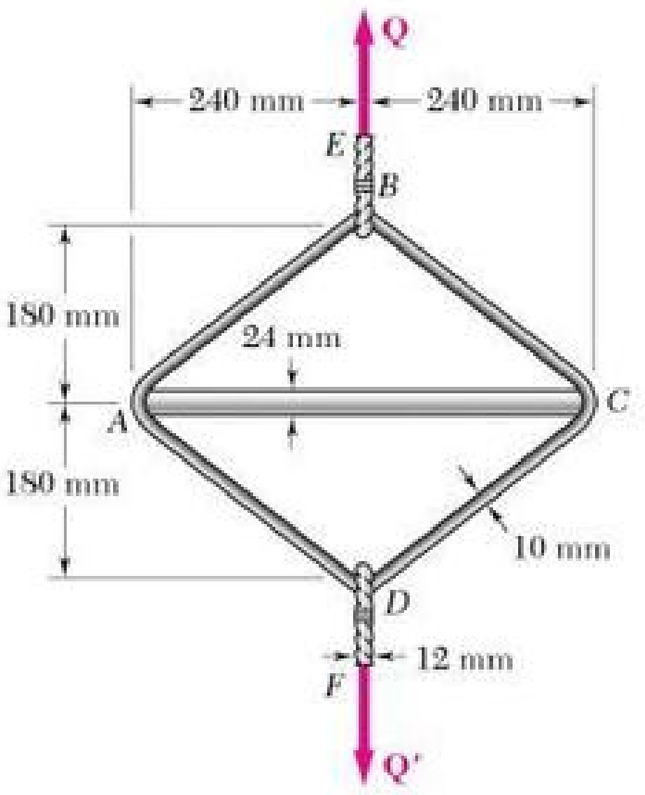


Fig. P1.37

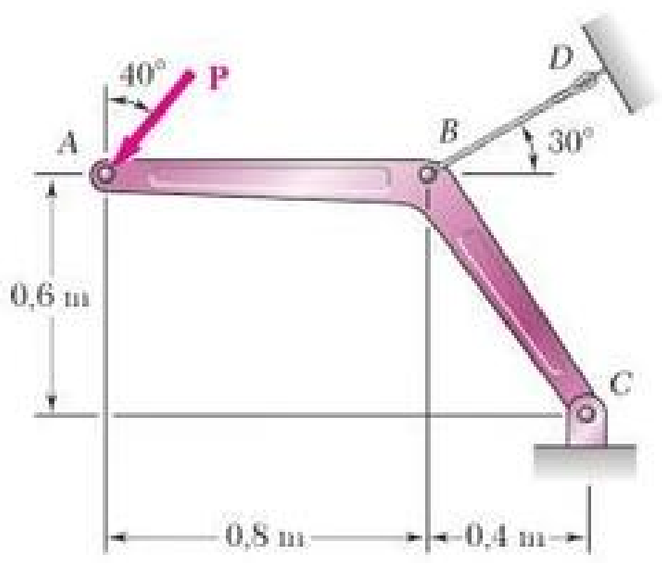


Fig. P1.38 e *P1.39*

1.38 O elemento *ABC*, suportado por um pino em *C* e por um cabo *BD*, foi projetado para suportar uma carga **P** de 16 kN conforme mostrado. Sabendo que a carga limite para o cabo *BD* é de 100 kN, determine o coeficiente de segurança com relação à falha do cabo.

1.39 Sabendo que a carga limite no cabo *BD* é de 100 kN e que o coeficiente de segurança exigido para a falha do cabo é de 3,2, determine a intensidade do maior esforço **P** que pode ser aplicado com segurança conforme o indicado para o elemento *ABC*.

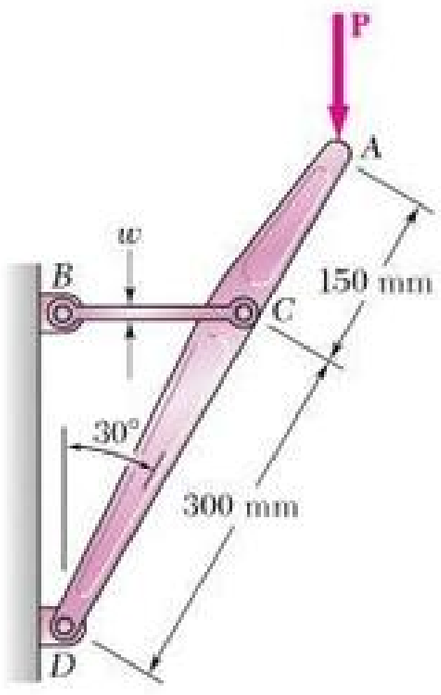


Fig. P1.40 e P1.41

1.40 O vínculo horizontal *BC* tem 6,4 mm de espessura, uma largura $w = 31{,}8$ mm e é feito de um aço que tem um limite de resistência à tração de 450 MPa. Qual é o coeficiente de segurança, se a estrutura mostrada for projetada para suportar uma carga $P = 45$ kN?

1.41 O vínculo horizontal *BC* tem 6,4 mm de espessura e é feito de um aço com um limite de resistência à tração de 450 MPa. Qual deverá ser a largura *w* do vínculo, se a estrutura mostrada for projetada para suportar uma carga $P = 36$ kN com um coeficiente de segurança igual a 3?

1.42 O vínculo AB deve ser feito de um aço para o qual o limite da tensão normal é 450 MPa. Determine a área da seção transversal para AB para a qual o coeficiente de segurança seja 3,50. Suponha que o vínculo seja reforçado adequadamente ao redor dos pinos em A e B.

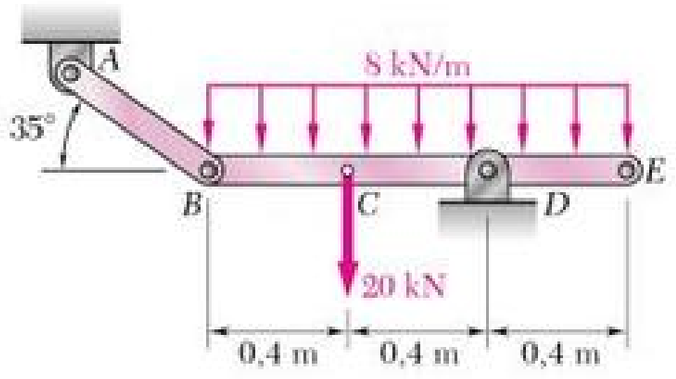


Fig. *P1.42*

1.43 Os dois elementos de madeira mostrados suportam uma carga de 16 kN e são unidos por juntas de madeira contraplacadas perfeitamente coladas pela superfície de contato. A tensão de cisalhamento limite da cola é de 2,5 MPa e o espaçamento entre os elementos é de 6 mm. Determine o comprimento L necessário para que as juntas trabalhem com um coeficiente de segurança igual a 2,75.

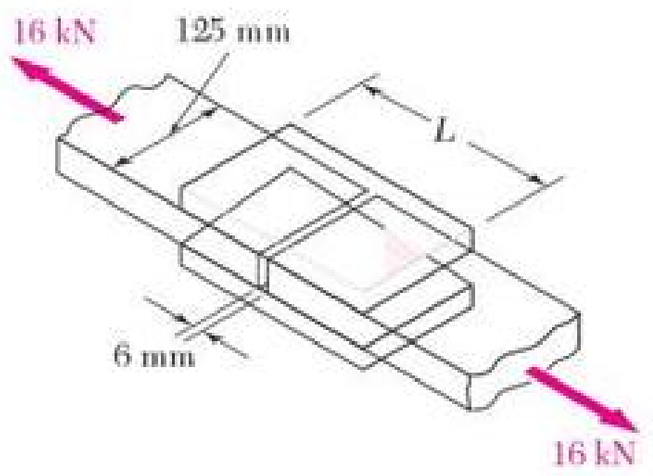


Fig. P1.43

1.44 Para a conexão e o carregamento do Problema 1.43, determine o coeficiente de segurança, sabendo que o comprimento de cada junta é $L = 180$ mm.

1.45 Três parafusos de aço com 18 mm de diâmetro devem ser utilizados para fixar a chapa de aço mostrada na figura em uma viga de madeira. Sabendo que a chapa suportará uma carga de 110 kN e que o limite da tensão de cisalhamento do aço utilizado é 360 MPa, determine o coeficiente de segurança para esse projeto.

1.46 Três parafusos de aço devem ser utilizados para fixar a chapa de aço mostrada na figura em uma viga de madeira. Sabendo que a chapa suportará uma carga de 110 kN, que o limite da tensão de cisalhamento do aço utilizado é 360 MPa e que é desejado um coeficiente de segurança 3,35, determine o diâmetro necessário para os parafusos.

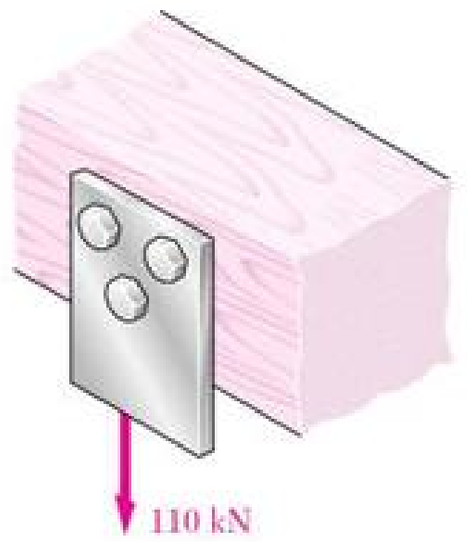


Fig. *P1.45* e *P1.46*

1.47 Uma carga **P** é aplicada em um pino de aço que foi inserido em um elemento de madeira curto preso em um teto, como mostra a figura. O limite de resistência à tração da madeira utilizada é 82,7 MPa e 10,3 MPa em cisalhamento, ao passo que o limite de resistência do aço é 207 MPa em cisalhamento. Sabendo que o diâmetro do pino é $d = 16$ mm e que a intensidade da carga é $P = 22{,}2$ kN, determine (*a*) o coeficiente de segurança para o pino e (*b*) os valores necessários de b e c, se o valor do coeficiente de segurança do elemento de madeira for o mesmo que o encontrado na parte *a* para o pino.

1.48 Para o suporte do Problema 1.47, sabendo que $b = 40{,}6$ mm, $c = 55{,}9$ mm e $d = 12{,}7$ mm, determine a carga **P** para um coeficiente de segurança global desejado igual a 3,2.

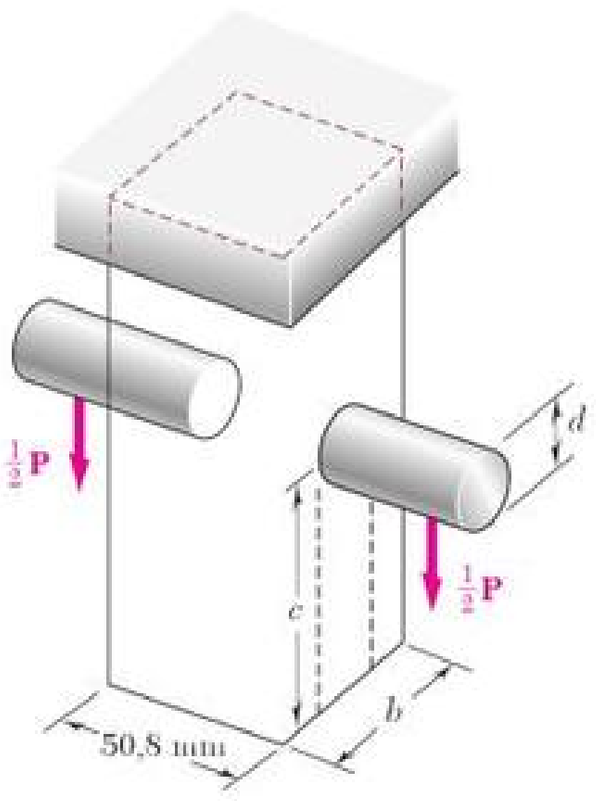


Fig. P1.47

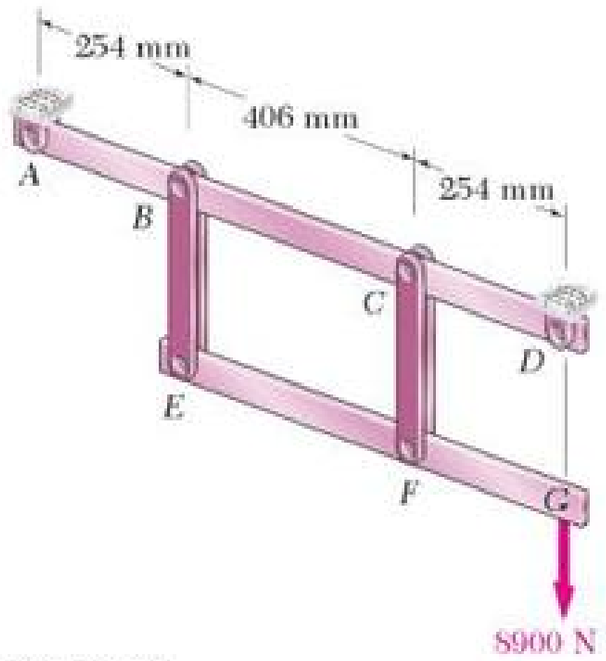


Fig. P1.49

1.49 Os dois vínculos verticais *CF* que conectam os dois elementos horizontais *AD* e *EG* têm uma seção transversal retangular uniforme de 6,35 × 25,4 mm e são feitos com um aço que tem limite de resistência em tração de 413,7 MPa, enquanto os dois pinos em *C* e *F* têm um diâmetro de 12,7 mm e são feitos de aço com um limite de resistência em cisalhamento de 172,4 MPa. Determine o coeficiente global de segurança para os vínculos *CF* e os pinos que os conectam aos elementos horizontais.

1.50 Resolva o Problema 1.49 assumindo que os pinos em *C* e *F* tenham sido substituídos por pinos com 19,05 mm de diâmetro.

1.51 Cada um dos elementos *AB* e *CD* está conectado a um suporte e ao elemento *BCE* por pinos de aço com 25,4 mm de diâmetro em cisalhamento simples. Sabendo que o limite de tensão de cisalhamento é de 207 MPa para o aço utilizado nos pinos e que o limite de tensão normal é de 483 MPa para o aço utilizado nos elementos, determine a carga **P** admissível se deseja um coeficiente de segurança global igual a 3,0. (Observe que os elementos não são reforçados no contorno dos orifícios dos pinos.)

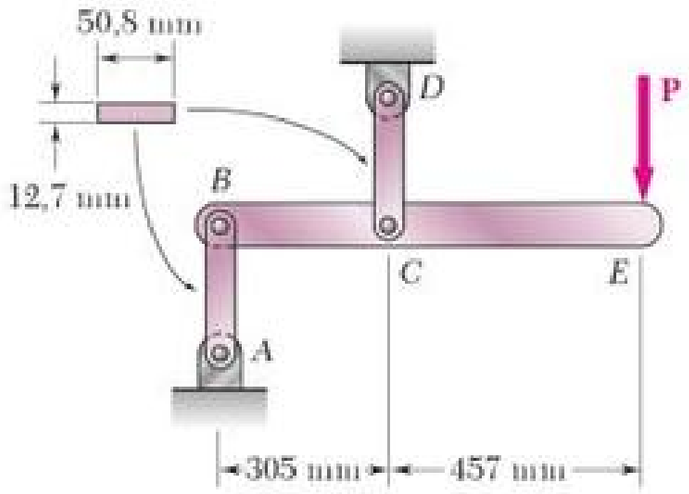


Fig. P1.51

1.52 Um projeto alternativo está sendo considerado para a estrutura *BCE* do Problema 1.51, no qual o elemento *CD* será substituído por dois elementos, cada um com seção transversal de 6,35 × 50,8 mm, levando os dois pinos em *C* e *D* estarem solicitados a duplo cisalhamento. Supondo que todas as demais especificações permanecem inalteradas, determine a carga **P** admissível se for adotado um coeficiente global de segurança 3,0.

1.53 Na estrutura de aço mostrada na figura é utilizado um pino de 6 mm de diâmetro em *C* e são utilizados pinos de 10 mm de diâmetro em *B* e *D*. O limite da tensão de cisalhamento é 150 MPa em todas as conexões, e o limite da tensão normal é 400 MPa na barra *BD*. Sabendo que se deseja um coeficiente de segurança de 3,0, determine a maior carga **P** que pode ser aplicada em *A*. Note que a barra *BD* não é reforçada ao redor dos furos dos pinos.

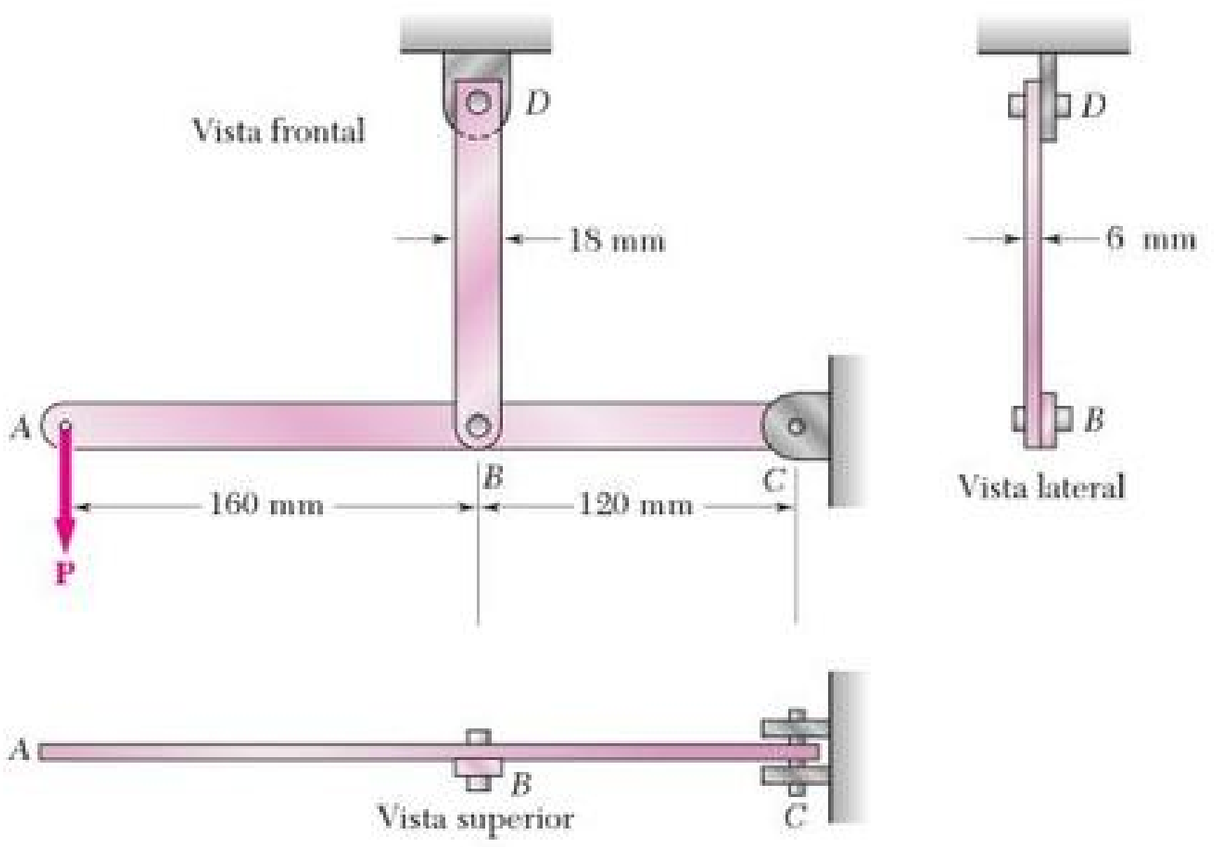


Fig. P1.53

1.54 Resolva o Problema 1.53 supondo que a estrutura foi reprojetada para utilizar pinos com diâmetro de 12 mm em *B* e *D* e nenhuma outra alteração foi feita.

1.55 Na estrutura mostrada, é utilizado um pino de 8 mm de diâmetro em *A* e pinos de 12 mm de diâmetro em *B* e *D*. Sabendo que o limite da tensão de cisalhamento é 100 MPa em todas as conexões e que o limite da tensão normal é 250 MPa em cada um dos dois vínculos que conectam *B* e *D*, determine a carga **P** admissível se adotarmos um coeficiente global de segurança de 3,0.

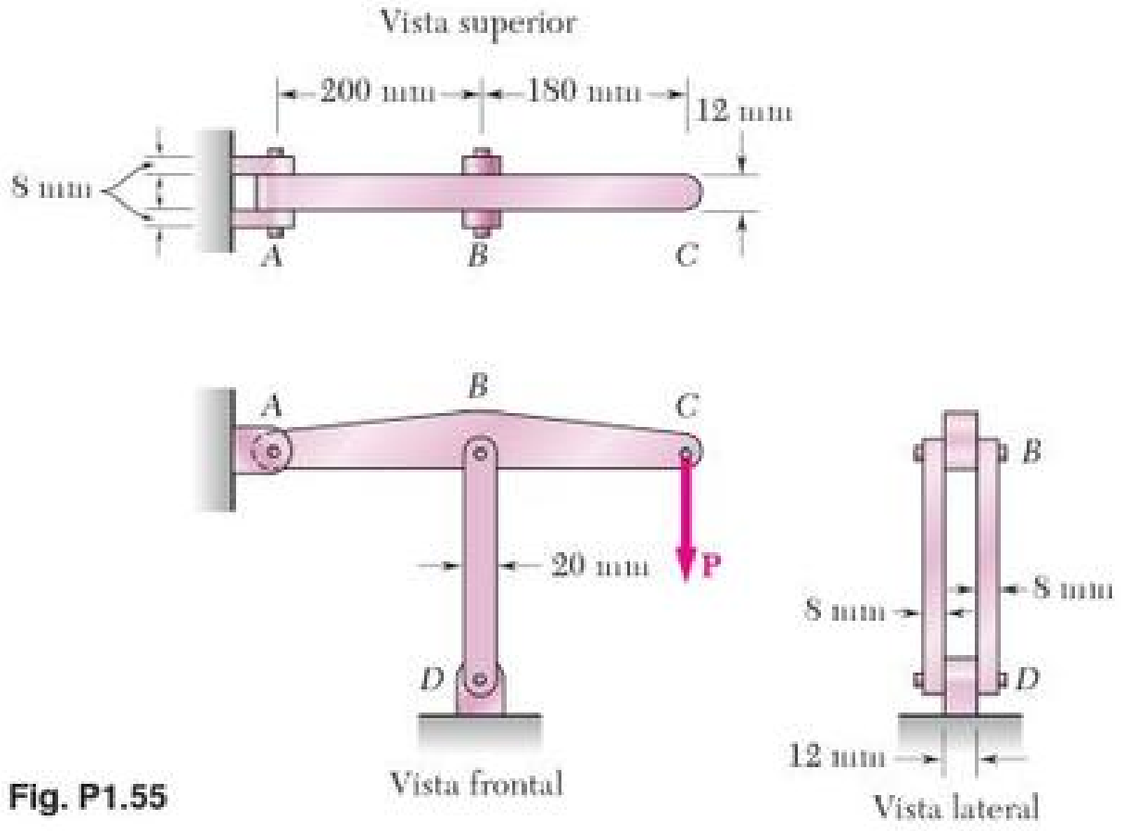


Fig. P1.55

1.56 Em um projeto alternativo para a estrutura do Problema 1.55, deve ser utilizado um pino de 10 mm de diâmetro em A. Supondo que todas as outras especificações permaneçam inalteradas, determine a carga **P** admissível se adotarmos um coeficiente global de segurança de 3,0.

***1.57** Uma plataforma de 40 kg está presa à extremidade *B* de uma barra *AB* de madeira, de 50 kg, suportada, conforme mostra a figura, por um pino em *A* e por uma barra esbelta de aço *BC* com um limite de carga de 12 kN. (*a*) Utilizando o método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência, com um coeficiente de resistência $\phi = 0{,}90$ e coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}25$ e $\gamma_E = 1{,}6$, determine a maior carga que pode ser colocada com segurança na plataforma. (*b*) Qual é o coeficiente de segurança convencional correspondente para a barra *BC*?

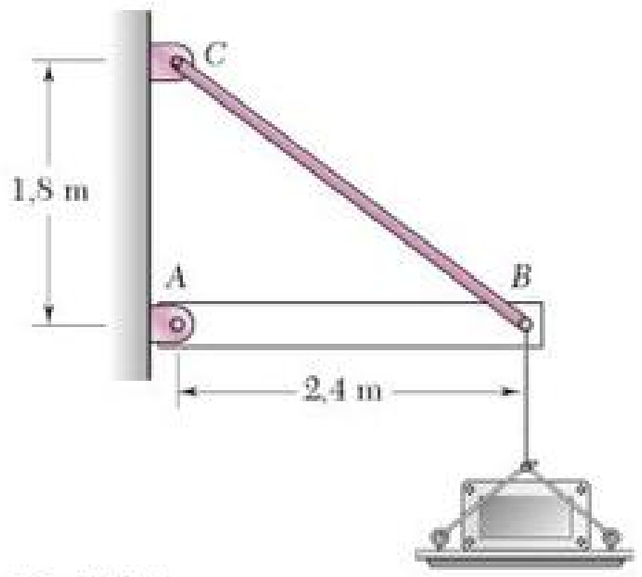


Fig. P1.57

***1.58** Deve ser utilizado o método do Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência para selecionar os dois cabos a serem utilizados para subir e descer uma plataforma com dois operários lavadores de janelas. A plataforma pesa 710 N e supõe-se que cada um dos lavadores pesa 870 N incluindo seus equipamentos. Como os operários podem andar livremente na plataforma, 75% do peso total deles e de seus equipamentos será utilizado como carga externa de projeto para cada cabo. (*a*) Supondo um coeficiente de resistência $\phi = 0{,}85$ e coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}2$ e $\gamma_E = 1{,}5$, determine o limite mínimo de carga necessário de um cabo. (*b*) Qual é o coeficiente de segurança convencional para os cabos selecionados?

Fig. P1.58

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 1

Esse capítulo foi dedicado ao conceito de tensão e à introdução aos métodos utilizados para a análise e o projeto de máquinas e estruturas.

A Seção 1.2 apresentou uma rápida revisão dos métodos da estática e sua aplicação na determinação das reações de apoio em estruturas simples formadas por membros conectados por pinos. Demos ênfase ao uso do *diagrama de corpo livre* para obter equações de equilíbrio cuja resolução permite obter as reações de apoio desconhecidas. Foram utilizados diagramas de corpo livre também para determinar as forças internas nos vários componentes da estrutura.

O conceito de *tensão* foi introduzido inicialmente na Seção 1.3 em que considerou-se uma barra sob *carga axial*. A *tensão normal na seção transversal dessa* barra foi obtida dividindo-se a intensidade P da carga pela área A de sua seção transversal (Fig. 1.8a). Assim, temos

Carga axial. Tensão normal

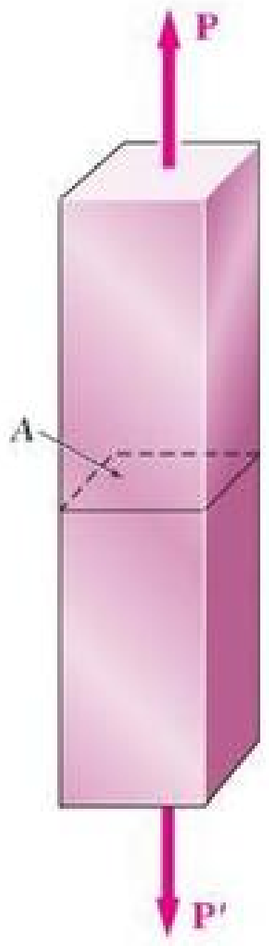


Fig. 1.18*a*

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1.5}$$

A Seção 1.4 foi dedicada a uma breve discussão das duas principais tarefas de um engenheiro, que são a *análise* e o *projeto* de estruturas e máquinas.

Conforme notamos na Seção 1.5, o valor de σ obtido da Equação (1.5) representa a *tensão média* sobre a seção e não a tensão em um ponto Q específico da seção. Considerando uma pequena área ΔA ao redor de Q e a intensidade ΔF da força exercida sobre ΔA, definimos a tensão no ponto Q como

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1.6}$$

Em geral, o valor obtido para a tensão σ no ponto Q é diferente do valor da tensão média dado pela Fórmula (1.5) e sabe-se que ele varia ao longo da seção. No entanto, essa variação é pequena em qualquer seção distante dos pontos de aplicação das cargas. Na prática, portanto, a distribuição da tensão normal em uma barra com carga axial supõe-se *uniforme*, exceto nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das cargas.

Contudo, para que a distribuição das tensões seja uniforme em uma dada seção, é necessário que a linha de ação das cargas **P** e **P′** passem através do *centroide C* da seção. Uma carga desse tipo é chamada de carga axial *centrada*. No caso de uma carga axial *excêntrica*, a distribuição de tensões não é uniforme. As tensões em elementos submetidos a uma carga axial excêntrica serão discutidas no Capítulo 4.

Quando *forças transversais* **P** e **P′** iguais e opostas de intensidade P são aplicadas a uma barra AB (Fig. 1.16a), são criadas *tensões de cisalhamento* τ sobre qualquer seção localizada entre os pontos de aplicação das duas forças (Seção 1.6). Essas tensões variam bastante através da seção e sua distribuição *não pode* ser considerada uniforme. No entanto, dividindo a intensidade P (chamada de força *cortante* na seção) pela área da seção transversal A, definimos a *tensão de cisalhamento média* sobre a seção.

Forças transversais. Tensão de cisalhamento

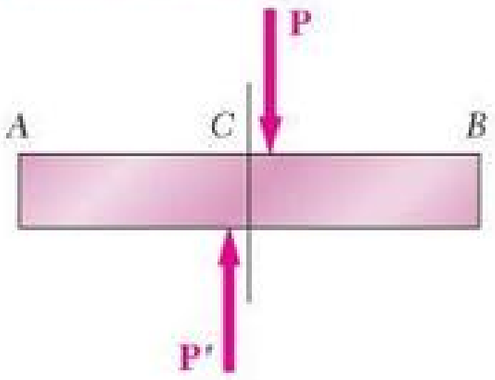


Fig. 1.16a

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} \tag{1.8}$$

Tensões de cisalhamento são encontradas em parafusos, pinos ou rebites que conectam dois elementos estruturais ou em componentes de máquinas. Por exemplo, no caso do parafuso CD (Fig. 1.18), que está sob *corte simples*, temos

Corte simples e duplo

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \tag{1.9}$$

ao passo que, no caso dos parafusos EG e HJ (Fig. 1.20), que estão ambos sob *corte duplo*, tínhamos

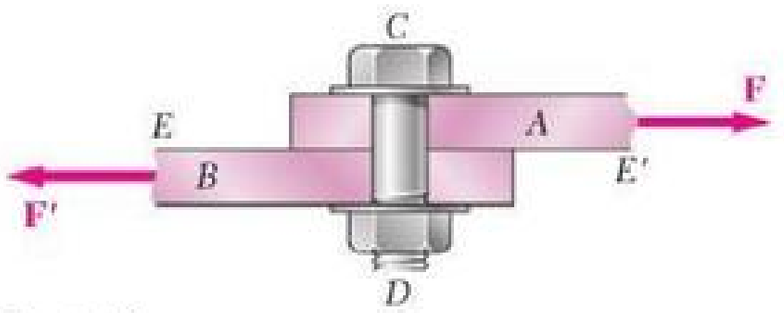


Fig. 1.18

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \tag{1.10}$$

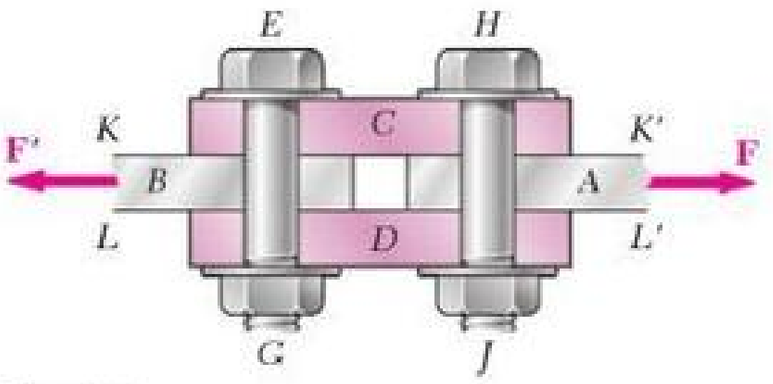


Fig. 1.20

Parafusos, pinos e rebites também criam tensões localizadas ao longo das superfícies de contato nos elementos conectados (Seção 1.7). O parafuso CD da Fig. 1.18, por exemplo, cria tensões na superfície semicilíndrica da chapa A com a qual ele está em contato (Fig. 1.22). Como a distribuição dessas tensões é bastante complicada, utilizamos na prática um valor nominal médio σ_e da tensão, chamado de *tensão de esmagamento*, obtida dividindo-se a carga P pela área do retângulo que representa a projeção do parafuso na seção da chapa. Designando por t a espessura da chapa e por d o diâmetro do parafuso, temos

Tensão de esmagamento

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \tag{1.11}$$

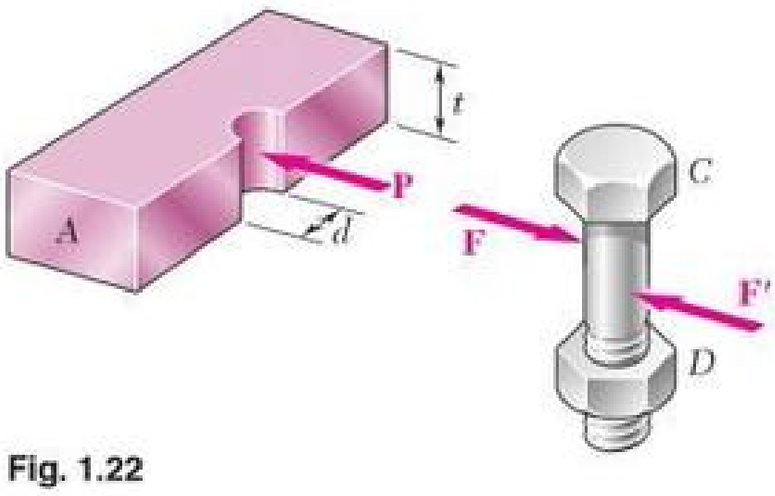


Fig. 1.22

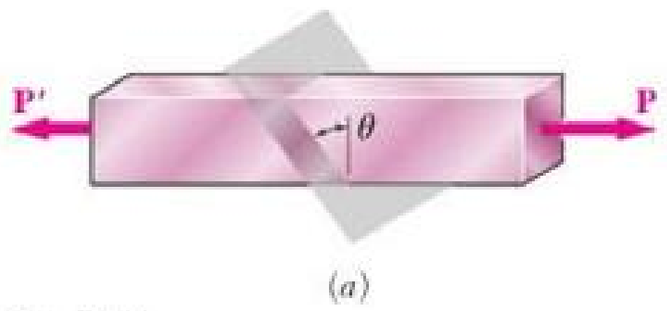
Na Seção 1.8, aplicamos o conceito introduzido nas seções anteriores para analisar uma estrutura simples formada por dois elementos conectados por pinos e suportando uma carga dada. Determinamos sucessivamente as tensões normais nos dois elementos, prestando especial atenção às suas seções mais estreitas, às tensões de cisalhamento nos vários pinos e à tensão de esmagamento em cada conexão.

O método que você vai utilizar na solução de um problema em mecânica dos materiais foi descrito na Seção 1.9. A sua solução deverá começar com um *enunciado* claro e preciso do problema. Você desenhará então um ou vários *diagramas de corpo livre* que utilizará para escrever *equações de equilíbrio*. Essas equações serão resolvidas em função das *forças desconhecidas*, a partir das quais podem ser computadas as *tensões* e as *deformações* necessárias. Uma vez obtida a resposta, esta deverá ser *cuidadosamente verificada*.

Método de solução

A primeira parte do capítulo terminou com uma discussão sobre a *precisão numérica* em engenharia, salientando o fato de que a precisão de uma resposta nunca pode ser maior que a de um determinado dado (Seção 1.10).

Tensões em um corte oblíquo



(*a*)

Fig. 1.30*a*

Na Seção 1.11, consideramos as tensões criadas em um *corte oblíquo* em uma barra sob carga axial. Descobrimos que ocorriam *tensões normais* e *de cisalhamento* nessa situação. Designando por θ o ângulo formado pelo plano de corte com um plano normal (Fig. 1.30*a*) e por A_0 a área de uma seção perpendicular ao eixo do componente, determinamos as expressões a seguir para a tensão normal σ e a tensão de cisalhamento τ no corte oblíquo:

$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \tau = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{1.14}$$

Observamos a partir dessas fórmulas que a tensão normal é máxima e igual a $\sigma_m = P/A_0$ para $\theta = 0$, enquanto a tensão de cisalhamento é máxima e igual a $\tau_m = P/2A_0$ para $\theta = 45°$. Notamos também que $\tau = 0$ quando $\theta = 0$, enquanto $\sigma = P/2A_0$ quando $\theta = 45°$.

Tensão sob carregamento geral

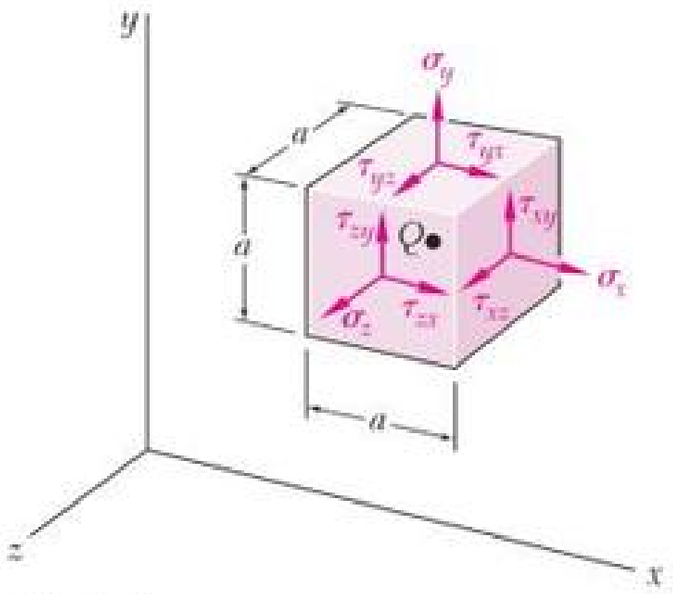


Fig. 1.36

Em seguida, discutimos o estado de tensão no ponto Q em um corpo sob as condições de carregamento mais gerais (Seção 1.12). Considerando um pequeno cubo centrado em Q (Fig. 1.36), designamos por σ_x a tensão normal aplicada a uma face do cubo perpendicular ao eixo x, e por τ_{xy} e τ_{xz}, respectivamente, as componentes y e z da tensão de cisalhamento aplicada na mesma face do cubo. Repetindo esse procedimento para as outras duas faces do cubo e observando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, concluímos que são necessários *seis componentes de tensão* para definir o estado de tensão em um determinado ponto Q, a saber, σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

A Seção 1.13 foi dedicada a uma discussão dos vários conceitos utilizados no projeto de estruturas em engenharia. A *carga-limite* de um componente estrutural ou componente de máquina é a carga com a qual se espera que o elemento ou componente venha a falhar: ela é calculada com base no valor do *limite de tensão* ou *limite de resistência* do material utilizado, conforme determinado por um teste de laboratório feito em corpo de prova daquele material. O limite de carga deverá ser consideravelemente maior que a *carga admissível*, isto é, a carga que o elemento ou componente poderá suportar sob condições normais. A relação entre a carga-limite e a carga admissível é definida como *coeficiente de segurança*:

Coeficiente de segurança

$$\text{Coeficiente de segurança} = C.S. = \frac{\text{carga-limite}}{\text{carga admissível}} \tag{1.24}$$

A determinação do coeficiente de segurança que deverá ser utilizado no projeto de uma determinada estrutura depende de muitas considerações, algumas das quais foram arroladas nessa seção.

Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência

A Seção 1.13 terminou com a discussão de uma abordagem alternativa ao projeto, conhecida como *Coeficiente de Projeto para Carga e Resistência*, que permite ao engenheiro distinguir entre as incertezas associadas à estrutura e aquelas associadas à carga.

PROBLEMAS DE REVISÃO

1.59 A haste *BD* consiste em uma barra simples com largura de 25,4 mm e espessura de 12,7 mm. Sabendo que cada pino tem diâmetro de 9,525 mm determine o valor da tensão normal média máxima na haste *BD* se (*a*) $\theta = 0$ e (*b*) $\theta = 90°$.

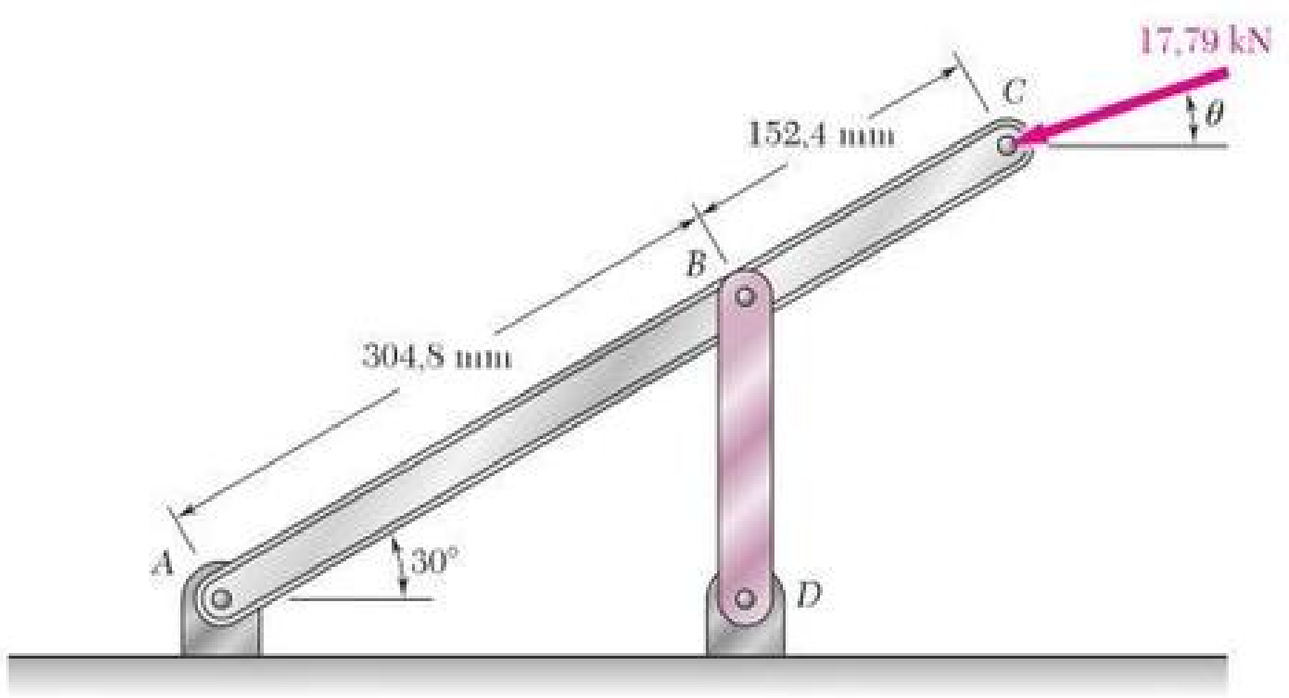


Fig. P1.59

1.60 Duas forças horizontais de 22,24 kN são aplicadas ao pino *B* do conjunto mostrado na figura. Sabendo que é utilizado um pino de 20,32 mm de diâmetro em cada conexão, determine o valor máximo da tensão normal média (*a*) na haste *AB* e (*b*) na haste *BC*.

1.61 Para a montagem e carregamento do Problema 1.60, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (*b*) a tensão de esmagamento média em *C* no componente *BC* e (*c*) a tensão de esmagamento média em *B* no componente *BC*.

1.62 Duas pranchas de madeira, cada uma com 22 mm de espessura e 160 mm de largura, são unidas por uma junta de encaixe colada, mostrada na figura. Sabendo que a junta falhará quando a tensão de cisalhamento média na cola atingir 820 kPa, determine o menor comprimento *d* admissível do encaixe uma vez que a junta precisa suportar uma carga axial de intensidade $P = 7{,}6$ kN.

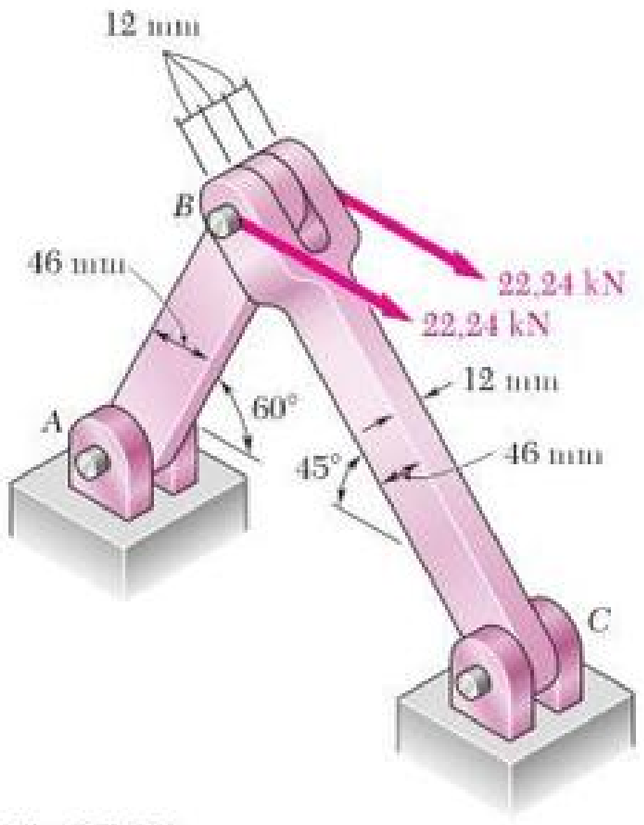


Fig. P1.60

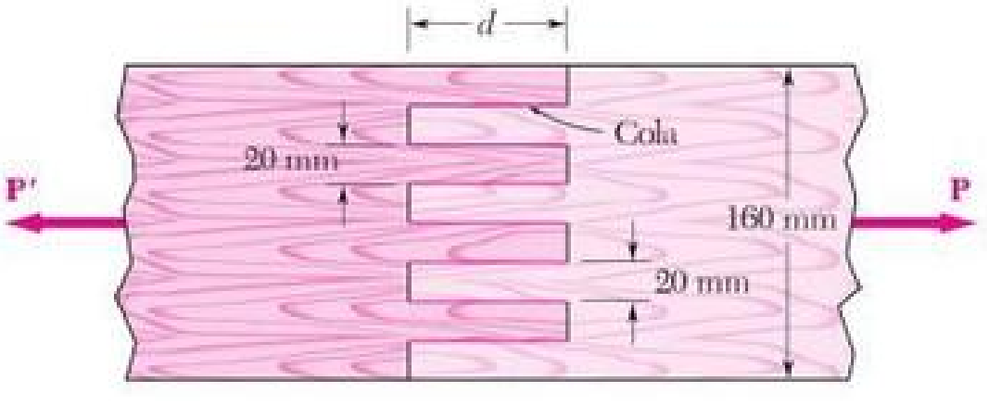


Fig. *P1.62*

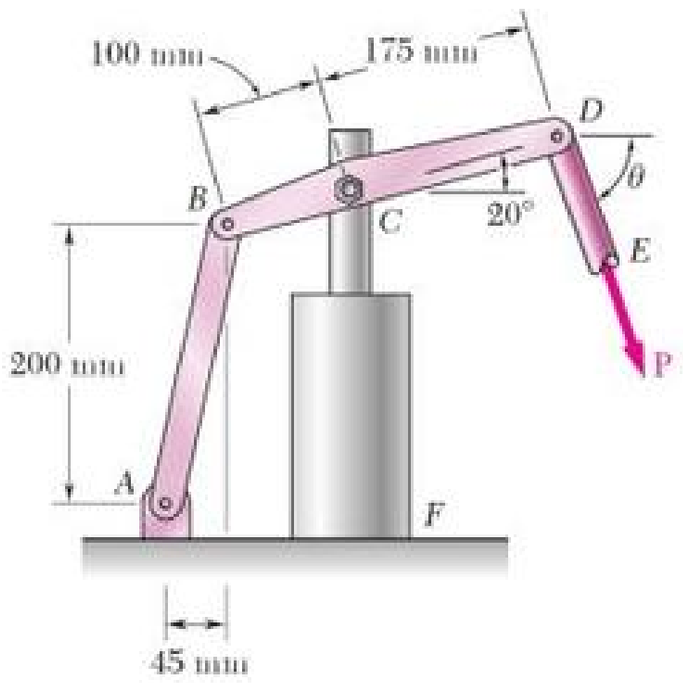


Fig. P1.63 e *P1.64*

1.63 O cilindro hidráulico CF, que controla parcialmente a posição da haste DE, foi bloqueado na posição mostrada na figura. A barra BD tem 15 mm de espessura e está conectada à haste vertical por um parafuso com diâmetro de 9 mm. Sabendo que $P = 2$ kN e $\theta = 75°$, determine (a) a tensão de cisalhamento média no parafuso e (b) a tensão de esmagamento em C na barra BD.

1.64 O cilindro hidráulico CF, que controla parcialmente a posição da haste DE, foi bloqueado na posição mostrada na figura. A barra AB tem seção retangular uniforme de 12 × 25 mm e é conectada ao ponto B do membro BD por meio de um pino de 8 mm de diâmetro. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível no pino é de 140 MPa, determine (a) a maior força **P** que pode ser aplicada no ponto E quando $\theta = 60°$, (b) a correspondente tensão de contato em B na haste AB e (c) o correspondente valor da tensão normal máxima na haste AB.

1.65 Dois elementos de madeira de 70 × 110 mm de seção transversal retangular uniforme são unidos por uma junta colada, como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível na junta colada é de 500 kPa, determine a maior carga axial **P** possível de ser aplicada com segurança.

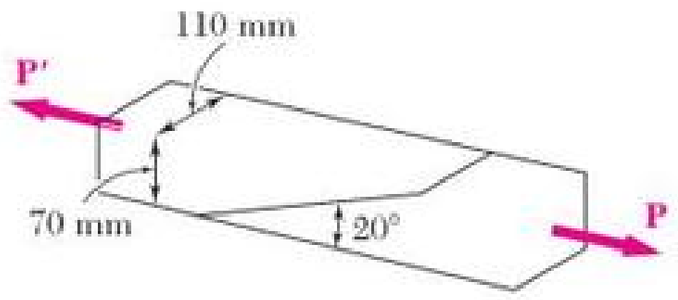


Fig. P1.65

1.66 A carga de 8 900 N pode ser movida ao longo da barra BD para qualquer posição entre os limites E e F. Sabendo que $\sigma_{adm} = 42$ MPa para o aço utilizado nas barras AB e CD, determine onde os limites devem ser colocados se o movimento permitido para a carga deve ser o maior possível.

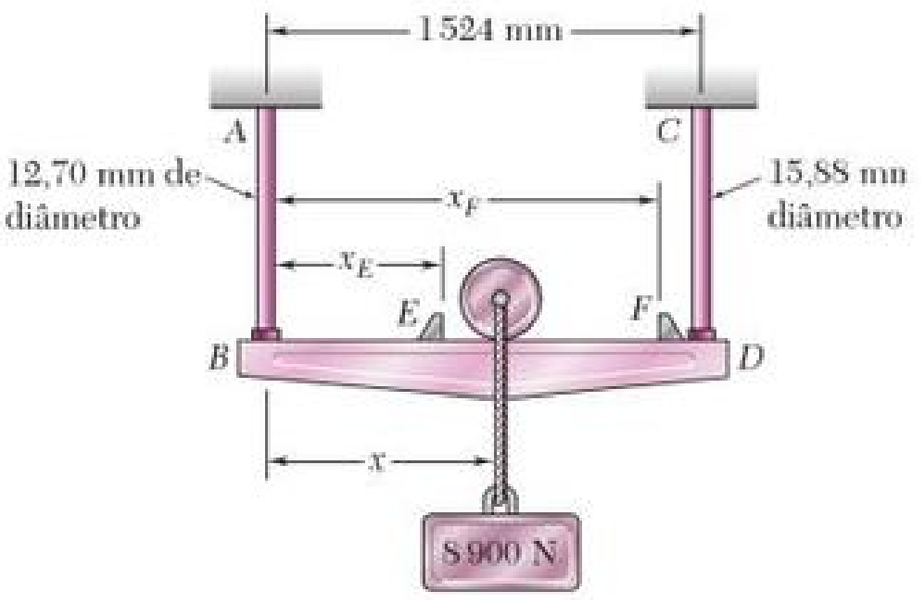


Fig. *P1.66*

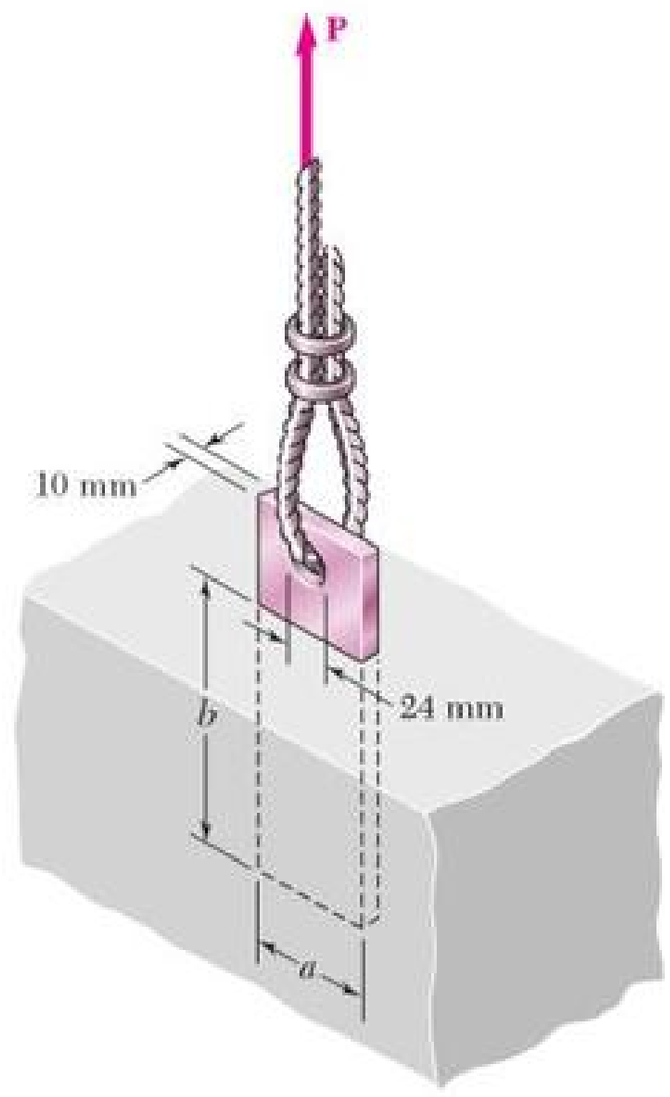


Fig. P1.67

1.67 Uma chapa de 10 mm de espessura está encaixada em um bloco de concreto e é utilizada para ancorar um cabo vertical de alta resistência, conforme mostra a figura. O diâmetro do furo na chapa é de 24 mm, o limite de resistência do aço utilizado é 250 MPa e o limite da tensão de aderência entre a chapa e o concreto é 2,1 MPa. Sabendo que se deseja um coeficiente de segurança de 3,60 quando $P = 18$ kN, determine (a) a largura a necessária para a chapa e (b) a dimensão b mínima com que a placa deve ser encaixada no bloco de concreto. (Despreze a tensão normal entre o concreto e a extremidade inferior da placa.)

1.68 As duas partes do elemento AB são coladas ao longo de um plano formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que o limite de tensão para a junta colada é de 17,2 MPa em tração e de 9 MPa em cisalhamento, determine o intervalo de valores de θ para o qual o coeficiente de segurança dos elementos seja pelo menos 3,0.

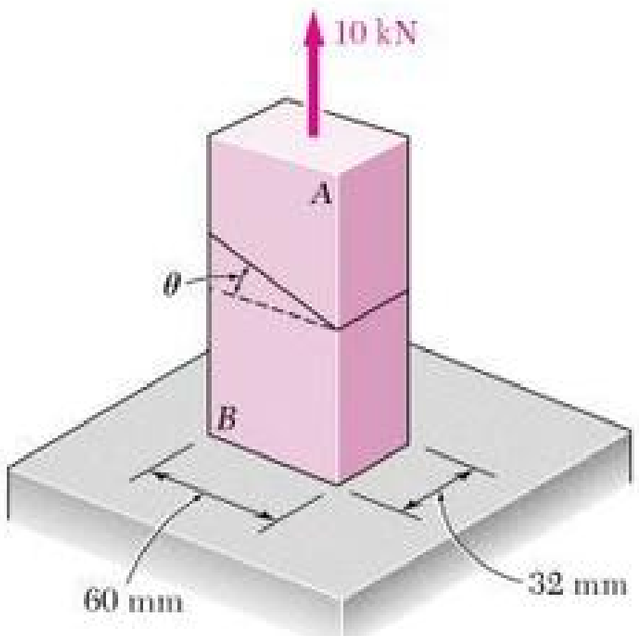


Fig. P1.68 e *P1.69*

1.69 As duas partes do elemento AB são coladas ao longo de um plano formando um ângulo θ com a horizontal. Sabendo que o limite de tensão para a junta colada é 17,24 MPa em tração e 8,96 MPa em cisalhamento, determine (*a*) o valor de θ para o qual o coeficiente de segurança do elemento seja máximo e (*b*) o valor correspondente do coeficiente de segurança. (*Dica*: equacione as expressões obtidas para os coeficientes de segurança respeitando a tensão normal e de cisalhamento.)

1.70 Uma força **P** é aplicada a uma barra de aço encaixada dentro de um bloco de concreto, conforme mostra a figura. Determine o menor comprimento L para o qual pode ser desenvolvida a tensão normal admissível na barra. Expresse o resultado em termos do diâmetro d da barra, da tensão normal admissível σ_{adm} no aço e da tensão média de aderência τ_{adm} entre o concreto e a superfície cilíndrica da barra. (Despreze as tensões normais entre o concreto e a extremidade da barra.)

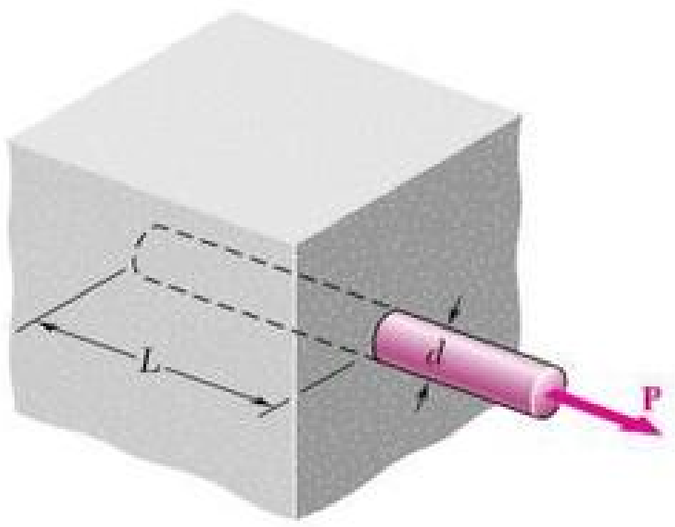


Fig. P1.70

PROBLEMAS PARA COMPUTADOR

Os problemas a seguir devem ser resolvidos no computador.

1.C1 Uma barra sólida de aço consistindo de n elementos cilíndricos soldados entre si é submetida ao carregamento indicado na figura. O diâmetro do elemento i é indicado por d_i e a carga aplicada em sua extremidade inferior por $\mathbf{P}_i$, sendo a intensidade de P_i dessa carga considerada positiva se $\mathbf{P}_i$ estiver direcionada para baixo como mostra a figura e negativa em caso contrário. (*a*) Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar a tensão média em cada elemento da barra. (*b*) Utilize esse programa para resolver os Problemas 1.2 e 1.4.

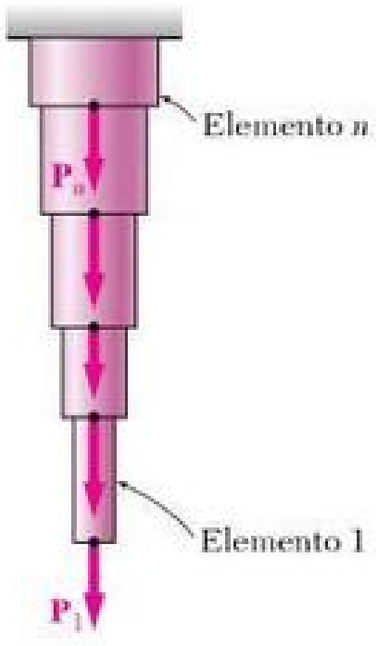


Fig. P1.C1

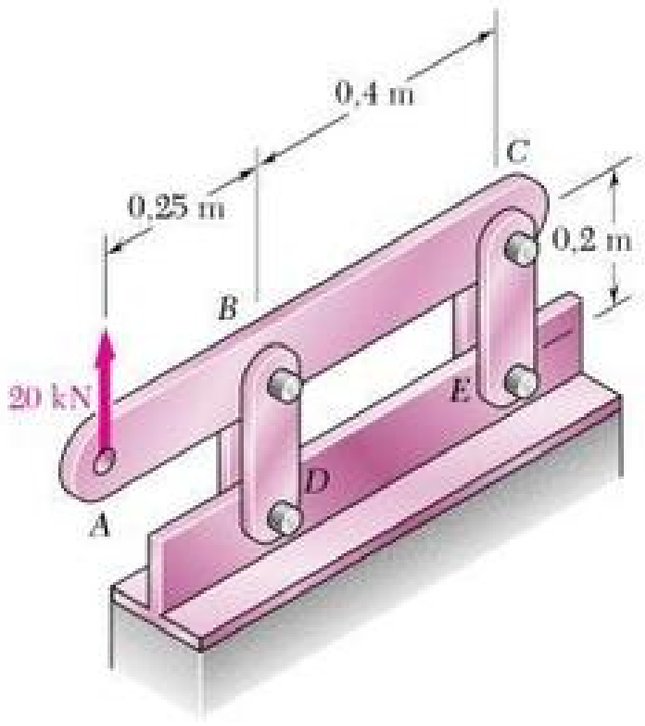


Fig. P1.C2

1.C2 Uma carga de 20 kN é aplicada ao elemento horizontal *ABC*, conforme mostra a figura. O elemento *ABC* tem uma seção transversal retangular uniforme de 10 × 50 mm e é suportado por quatro vínculos verticais, cada um com seção transversal retangular uniforme de 8 × 36 mm. Cada um dos quatro pinos em *B*, *C*, *D* e *E* tem o mesmo diâmetro *d* e está em corte duplo. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular para valores de *d* de 10 mm a 30 mm, utilizando incrementos de 1 mm, (1) o valor máximo da tensão normal média nos vínculos que conectam os pinos *B* e *D*, (2) a tensão normal média nos vínculos que conectam os pinos *C* e *E*, (3) a tensão de cisalhamento média no pino *B*, (4) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (5) a tensão de esmagamento média em *B* no elemento *ABC* e (6) a tensão de esmagamento média em *C* no elemento *ABC*. (b) Verifique o seu programa comparando os valores obtidos para *d* = 16 mm com as respostas dadas para os Problemas 1.7 e 1.27. (*c*) Utilize esse programa para determinar os valores admissíveis para o diâmetro *d* dos pinos, sabendo que os valores admissíveis para as tensões normal, de cisalhamento e de esmagamento para o aço utilizado são, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa e 230 MPa. (*d*) Resolva a parte *c* considerando que a espessura do elemento *ABC* foi reduzida de 10 mm para 8 mm.

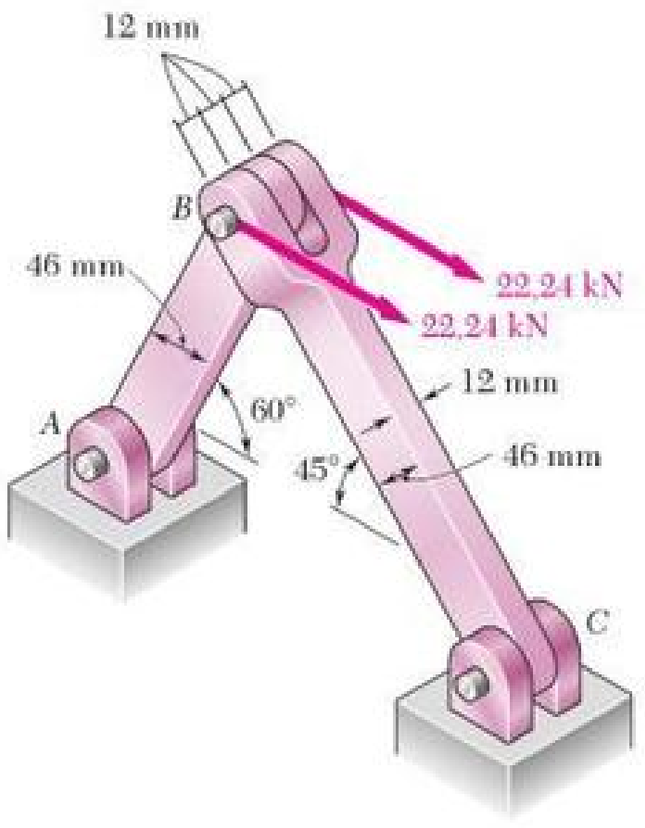


Fig. P1.C3

1.C3 Duas forças horizontais de 22,242 kN são aplicadas ao pino *B* do conjunto mostrado na figura. Cada um dos três pinos *A*, *B* e *C* tem o mesmo diâmetro *d* e está em corte duplo. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular para valores de *d* de 12,7 mm a 38,1 mm, utilizando incrementos de 1,27 mm, (1) o valor máximo da tensão normal média no elemento *AB*, (2) a tensão normal média no elemento *BC*, (3) a tensão de cisalhamento média no pino *A*, (4) a tensão de cisalhamento média no pino *C*, (5) a tensão de esmagamento média em *A* no elemento *AB*, (6) a tensão de esmagamento média em *C* no elemento *BC* e (7) a tensão de esmagamento média em *B* no elemento *BC*. (*b*) Verifique o seu programa comparando os valores obtidos para *d* = 20,32 mm com as respostas dadas para os Problemas ver resposta 1.60 e 1.61. (*c*) Utilize esse programa para encontrar os valores admissíveis para o diâmetro *d* dos pinos, sabendo que os valores admissíveis das tensões normal, de cisalhamento e de esmagamento para o aço utilizado são, respectivamente, 150 MPa, 90 MPa e 250 MPa. (*d*) Resolva a parte *c* supondo que um novo projeto esteja sendo investigado, no qual a espessura e largura dos dois elementos são alteradas, respectivamente, de 12 mm para 8 mm e de 45 mm para 60 mm.

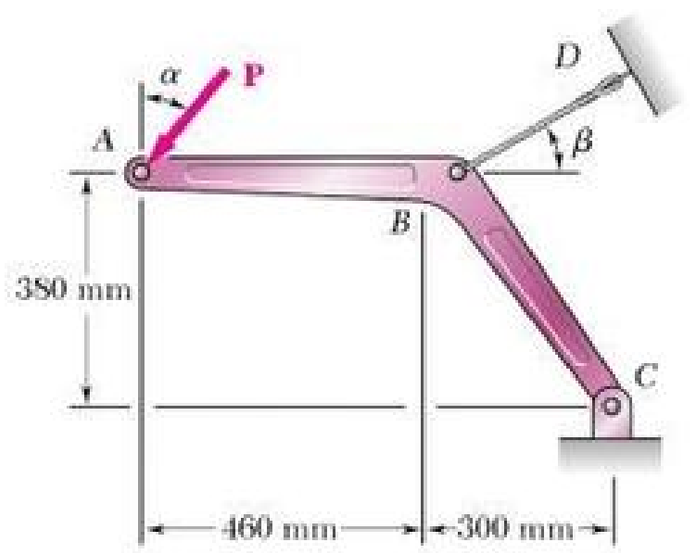


Fig. P1.C4

1.C4 Uma força **P** de 18 kN formando um ângulo α com a vertical é aplicada no elemento *ABC*, conforme mostra a figura. O elemento *ABC* é suportado por um pino e um suporte em *C* e por um cabo *BD* formando um ângulo β com a horizontal. (*a*) Sabendo que a carga-limite do cabo é 110 kN, elabore um programa de computador para fazer uma tabela dos valores do coeficiente de segurança do cabo para valores de α e β de 0 até 45°, utilizando incrementos em α e β correspondentes a incrementos de 0,1 na tan α e na tan β. (*b*) Verifique que, para um determinado valor de α, o valor máximo do coeficiente de segurança é obtido para $\beta = 38{,}66°$ e explique por quê. (c) Determine o menor valor possível do coeficiente de segurança para $\beta = 38{,}66°$, bem como o correspondente valor de α, e explique o resultado obtido.

1.C5 Uma carga **P** é suportada, conforme mostra a figura, por dois elementos de madeira de seção transversal retangular uniforme e unidos por uma junta colada. (*a*) Designando por σ_L e τ_L, respectivamente, o limite de resistência da junta em tração e em cisalhamento, elabore um programa de computador que, para valores de a, b, P, σ_L e τ_L e para valores de α de 5° a 85° em intervalos de 5°, possa ser utilizado para calcular (1) a tensão normal na junta, (2) a tensão de cisalhamento na junta, (3) o coeficiente de segurança relativo à falha em tração, (4) o coeficiente de segurança relativo a falha em cisalhamento e (5) o coeficiente de segurança global para a junta colada. (*b*) Aplique esse programa utilizando as dimensões e carregamentos dos elementos dos Problemas 1.29 e 1.31, sabendo que $\sigma_L = 1{,}034$ MPa e $\tau_L = 1{,}476$ MPa para a cola utilizada no Problema 1.29 e que $\sigma_L = 1{,}26$ MPa e $\tau_L = 1{,}50$ MPa para a cola utilizada no Problema 1.31. (*c*) Verifique que em cada um dos dois casos a tensão de cisalhamento é máxima para $\alpha = 45°$.

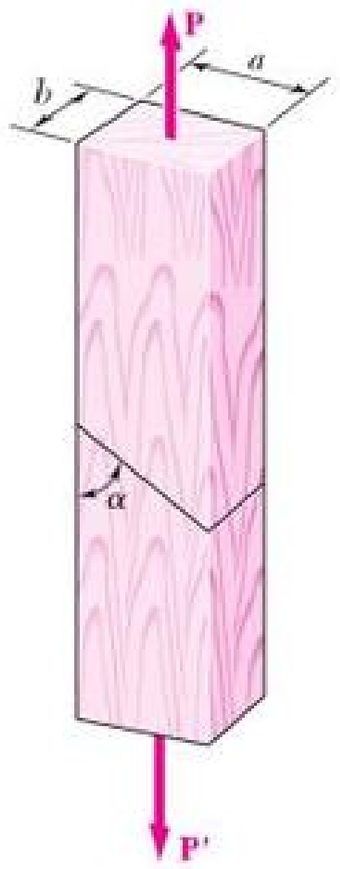


Fig. P1.C5

1.C6 O elemento *ABC* é suportado por um pino e suporte em *A* e por duas barras, conectadas por pinos ao elemento em *B* e a um suporte fixo em *D*. (*a*) Elabore um programa de computador para calcular a carga P_{adm} para quaisquer valores dados de (1) o diâmetro d_1 do pino em *A*, (2) o diâmetro comum d_2 dos pinos em *B* e *D*, (3) o limite da tensão normal σ_L em cada uma das duas barras, (4) o limite da tensão de cisalhamento τ_L em cada um dos três pinos e (5) o coeficiente de segurança global desejado C.S. O seu programa deverá também indicar qual das três tensões é crítica: a tensão normal nas barras, a tensão de cisalhamento no pino em *A* ou a tensão de cisalhamento nos pinos em *B* e *D*. (*b* e *c*) Verifique o seu programa utilizando os dados dos Problemas 1.55 e 1.56, respectivamente, e compare as respostas obtidas para P_{adm} com aquelas dadas no texto. (*d*) Utilize o seu programa para determinar a carga admissível P_{adm}, bem como quais as tensões que são críticas, quando $d_1 = d_2 = 15$ mm, $\sigma_L = 110$ MPa para as barras de alumínio, $\sigma_L = 100$ MPa para pinos de aço e C.S. = 3,2.

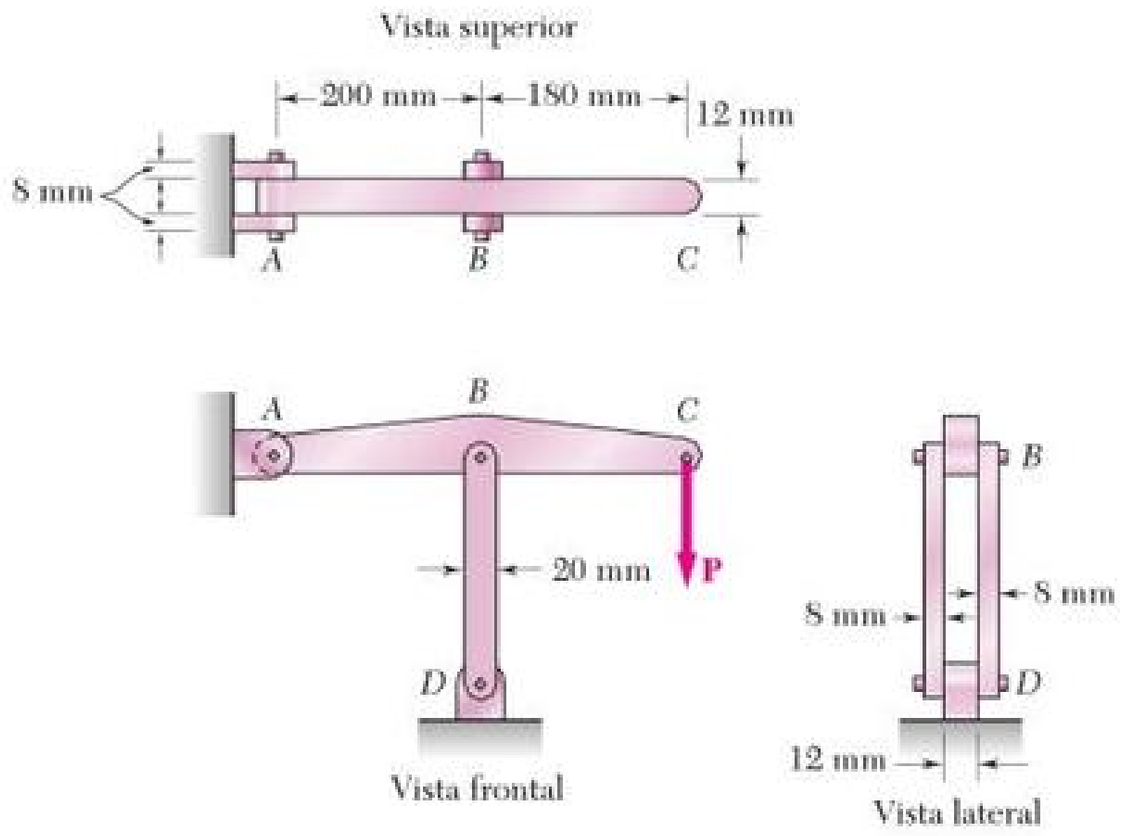
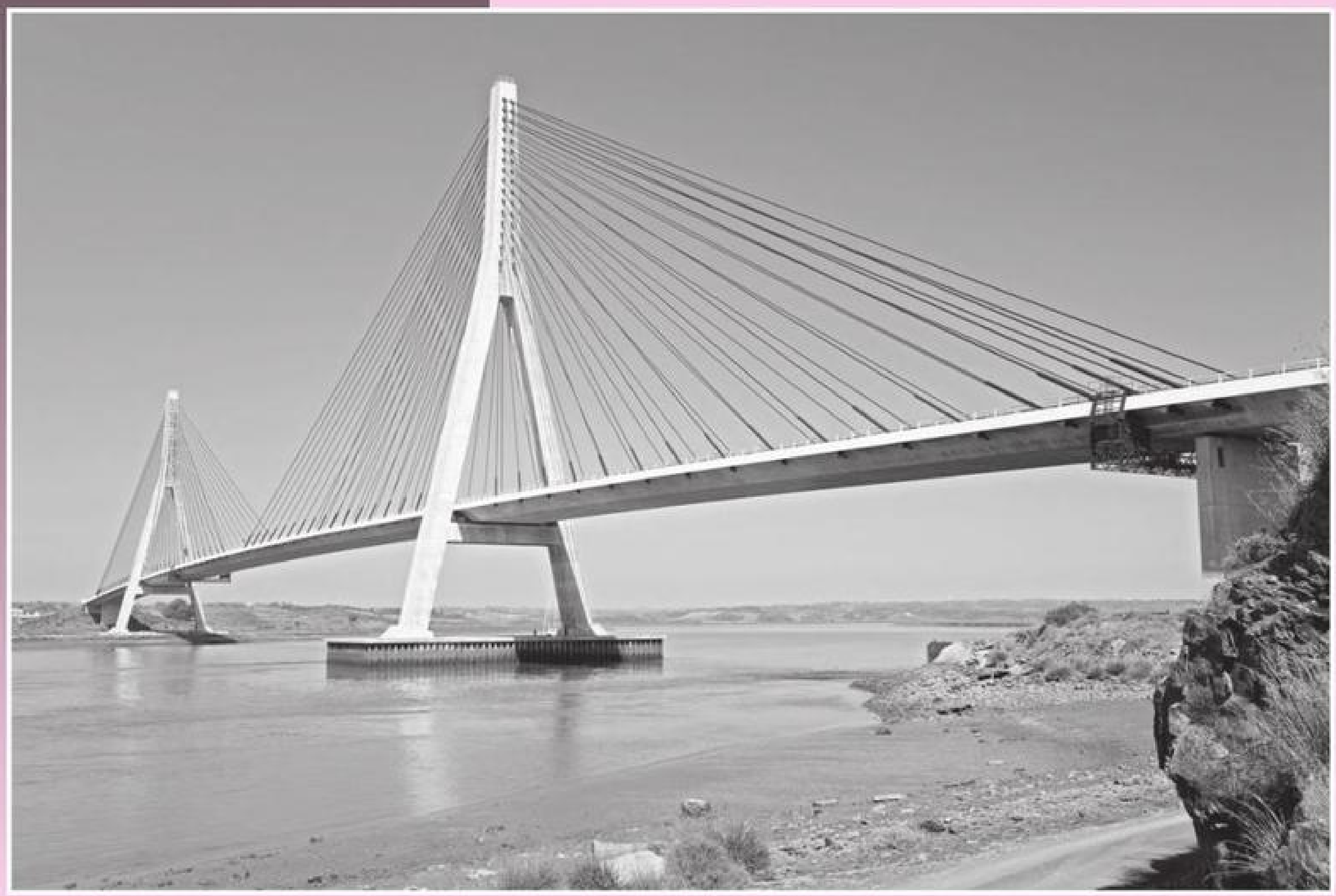


Fig. P1.C6

C A P Í T U L O

2

Tensão e deformação — Carregamento axial



Este capítulo é dedicado ao estudo das deformações que ocorrem em componentes estruturais sujeitos a carregamento axial. A alteração no comprimento das amarras foi cuidadosamente considerada no projeto desta ponte suspensa.

2.1. Introdução

No Capítulo 1, analisamos as tensões originadas nos vários componentes e conexões pelas cargas aplicadas em uma estrutura ou máquina. Aprendemos também a projetar componentes e conexões simples para que não falhassem sob condições específicas de carregamento. Um outro aspecto importante da análise e projeto de estruturas relaciona-se com as *deformações* produzidas pelas cargas aplicadas a uma estrutura. É claro que a análise das deformações é importante para se evitar deformações grandes o suficiente que possam impedir a estrutura de atender à finalidade para a qual ela foi destinada, mas essa análise também pode nos ajudar na determinação das tensões. Sem dúvida, nem sempre é possível determinar as forças nos componentes de uma estrutura aplicando-se somente os princípios da estática; isto porque a estática é baseada na hipótese de estruturas rígidas e indeformáveis. Considerando as estruturas de engenharia *deformáveis* e analisando as deformações em seus vários componentes, poderemos calcular as forças *estaticamente indeterminadas*, isto é, indeterminadas dentro do âmbito da estática. Também, conforme indicamos na Seção 1.5, a distribuição de tensões em um componente é estaticamente indeterminada, mesmo quando é conhecida a força nesse componente. Para determinar a distribuição real das tensões dentro de um componente, é então necessário analisar as deformações que ocorrem naquele componente. Neste capítulo, vamos considerar as deformações de um componente estrutural como uma haste, barra, ou placa sob *carregamento axial*.

Primeiro, a *deformação específica normal* ϵ em um componente será definida como a *deformação do componente por unidade de comprimento*. Construindo um gráfico da tensão σ em função da deformação específica ϵ, à medida que aumentarmos a carga aplicada ao componente, obteremos um *diagrama tensão-deformação específica* para o material utilizado. Por meio desse diagrama podemos determinar algumas propriedades importantes do material, como seu *módulo de elasticidade*, e se o material é *dúctil* ou *frágil* (Seções 2.2 a 2.5). Você verá também na Seção 2.5 que, embora o comportamento da maioria dos materiais seja independente da direção na qual a carga é aplicada, a resposta de materiais compósitos reforçados com fibras depende da direção da carga.

Por meio do diagrama tensão-deformação específica, podemos também determinar se as deformações no corpo de prova desaparecerão depois de a carga ser removida (neste caso dizemos que o material tem comportamento *elástico*,) ou se haverá uma *deformação permanente* ou *deformação plástica* (Seção 2.6).

A Seção 2.7 é dedicada ao fenômeno da *fadiga*, que faz com que os componentes de uma estrutura ou máquina venham a falhar após um número muito grande de cargas repetidas, mesmo que as tensões permaneçam na região elástica.

A primeira parte do capítulo finaliza com a Seção 2.8, dedicada à determinação da deformação de vários tipos de componentes sob várias condições de carregamento axial.

Nas Seções 2.9 e 2.10, serão considerados os *problemas estaticamente indeterminados*, isto é, problemas nos quais as reações e as forças internas *não podem* ser determinadas apenas pela estática. As equações de equilíbrio derivadas do diagrama de corpo livre do componente, devem ser complementadas por relações que envolve deformações; essas relações serão obtidas da geometria do problema.

Nas Seções 2.11 a 2.15, serão introduzidas constantes adicionais associadas com materiais isotrópicos — isto é, materiais com características mecâ-

nicas independentes da direção. Elas incluem o *coeficiente de Poisson*, que relaciona deformação lateral e axial, o *módulo de compressibilidade volumétrica*, que caracteriza a variação do volume de um material sob pressão hidrostática, e o *módulo de elasticidade transversal*, que relaciona componentes de tensão de cisalhamento e deformação específica de cisalhamento. Vamos determinar também as relações tensão-deformação específica para um material isotrópico sob um carregamento multiaxial.

Na Seção 2.16, serão desenvolvidas relações tensão-deformação específica que envolve vários valores distintos do módulo de elasticidade, do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade transversal, para materiais compósitos reforçados com fibras submetidos a carregamento multiaxial. Embora esses materiais sejam não-isotrópicos, geralmente apresentam propriedades especiais, conhecidas como propriedades *ortotrópicas*, que facilitam seu estudo.

No texto deste livro até aqui, as tensões são consideradas uniformemente distribuídas em determinada seção transversal; também supõe-se que elas permaneçam dentro da região elástica. A validade da primeira hipótese é discutida na Seção 2.17, enquanto *concentrações de tensões* próximas a furos circulares e adoçamentos em placas são consideradas na Seção 2.18. As Seções 2.19 e 2.20 dedicam-se à discussão das tensões e deformações em componentes feitos com um material dúctil quando o ponto de escoamento do material é excedido. Veremos, também, que dessas condições de carregamento resultam *deformações plásticas* permanentes e *tensões residuais*.

2.2. Deformação específica normal sob carregamento axial

Vamos considerar uma barra BC, de comprimento L e com seção transversal uniforme de área A, que está suspensa em B (Fig. 2.1*a*). Se aplicarmos uma força **P** à extremidade C, a barra se alonga (Fig. 2.1*b*). Construindo um gráfico com os valores da intensidade P da força em função da deformação δ (letra grega delta), obtemos determinado diagrama força-deformação (Fig. 2.2). Embora esse diagrama contenha informações úteis para a análise da barra em consideração, ele não pode ser utilizado diretamente para prever a deformação de uma barra do mesmo material mas com dimensões diferentes. De fato, observamos que, se uma deformação δ é produzida em uma barra BC por uma força **P**, é necessária uma força 2**P** para provocar a mesma deformação em uma barra $B'C'$ de mesmo comprimento L, mas com uma área de seção

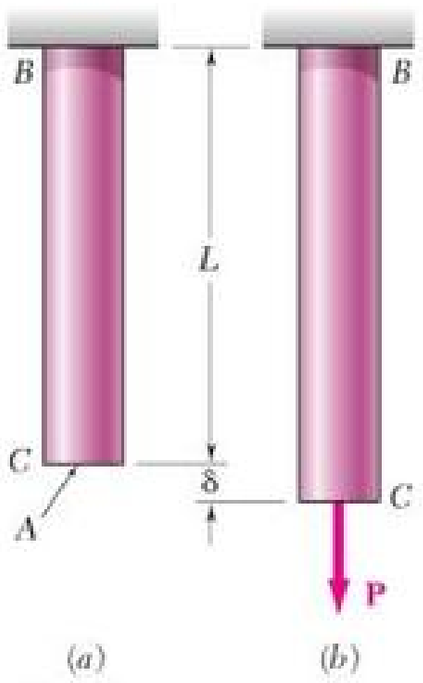


Fig. 2.1

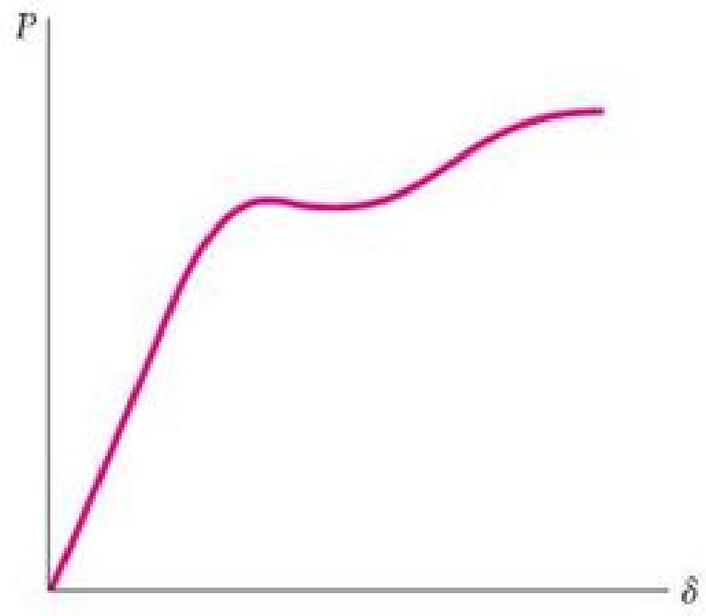


Fig. 2.2

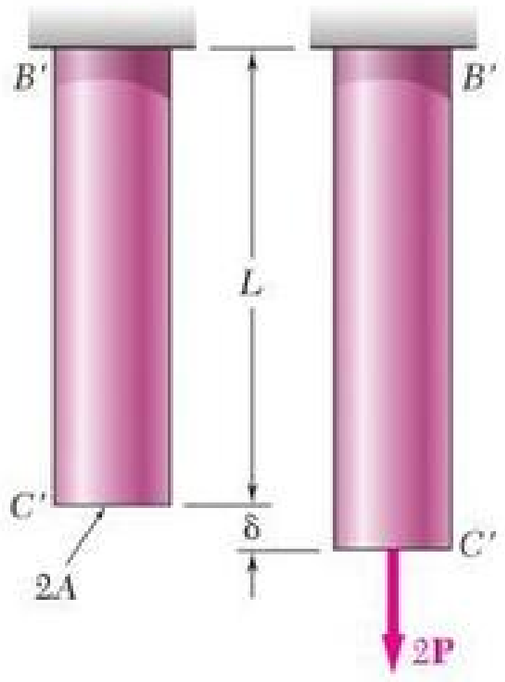


Fig. 2.3

transversal igual a $2A$ (Fig. 2.3). Notamos que, em ambos os casos, o valor da tensão é o mesmo: $\sigma = P/A$. Em contrapartida, uma força **P** aplicada a uma barra $B''C''$, com a mesma seção transversal de área A, mas com comprimento $2L$, provoca uma deformação 2δ naquela barra (Fig. 2.4), isto é, uma deformação duas vezes maior do que a deformação δ que ela produz na barra BC. Mas em ambos os casos, a relação entre a deformação e o comprimento da barra é a mesma; ela é igual a δ/L. Essa observação nos leva a introduzir o conceito de *deformação específica*: definimos *deformação específica normal* em uma barra sob carregamento axial como a *deformação por unidade de comprimento* da barra. Designando a deformação específica normal por ϵ (letra grega epsilon), temos

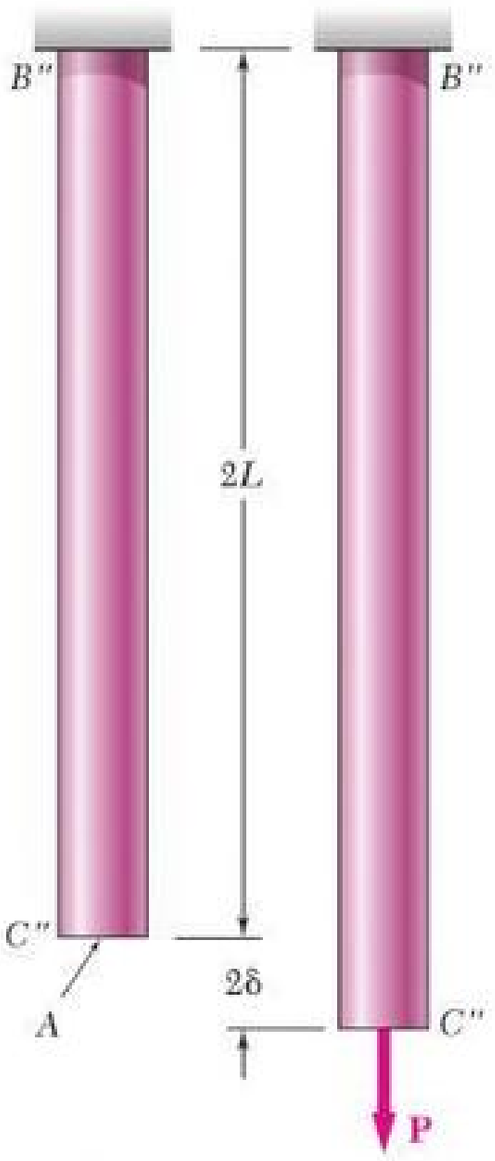


Fig. 2.4

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Construindo o gráfico da tensão $\sigma = P/A$ em função da deformação específica $\epsilon = \delta/L$, obtemos uma curva característica das propriedades do material que não depende das dimensões do corpo de prova utilizado. Essa curva é chamada de *diagrama tensão-deformação* e será discutida em detalhes na Seção 2.3.

Como a barra BC considerada na discussão anterior tinha uma seção transversal uniforme de área A, poderíamos supor que a tensão normal σ tem um valor constante igual a P/A por toda a barra. Assim, seria apropriado definir a deformação específica ϵ como a relação entre a deformação total δ sobre o comprimento total L da barra. No caso de um elemento com seção transversal de área A variável, a tensão normal $\sigma = P/A$ também varia ao longo do elemento e é necessário definir a deformação específica em determinado ponto Q considerando um pequeno elemento de comprimento não deformado Δx (Fig. 2.5). Designando por $\Delta\delta$ a deformação do elemento sob determinado carregamento, definimos a *deformação específica normal no ponto Q* como

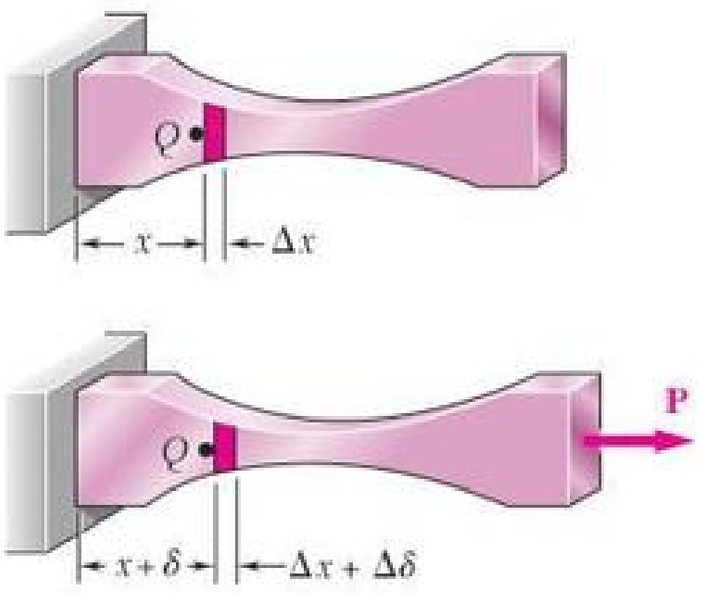


Fig. 2.5

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Como a deformação e o comprimento são expressos nas mesmas unidades, a deformação específica normal ϵ obtida dividindo-se δ por L (ou $d\delta$ por dx) é uma *quantidade adimensional*. Assim, obtemos o mesmo valor numérico para a deformação específica normal em determinado componente, independentemente de usarmos o sistema de unidades métrico SI ou o sistema inglês. Considere, por exemplo, uma barra de comprimento $L = 0{,}600$ m com seção transversal uniforme, que sofre uma deformação $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. A deformação específica correspondente é

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6}\ \text{m}}{0{,}600\ \text{m}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Note que a deformação poderia ter sido expressa em micrômetro: $\delta = 150\ \mu$m. Poderíamos, então, ter escrito

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150\ \mu\text{m}}{0{,}600\ \text{m}} = 250\ \mu\text{m/m} = 250\ \mu$$

e lido a resposta como "250 mícrons". Se usarmos unidades inglesas, o comprimento e a deformação da mesma barra são, respectivamente, $L = 23{,}6$ pol e $\delta = 5{,}91 \times 10^{-3}$ pol. A deformação específica correspondente é

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{5{,}91 \times 10^{-3}\ \text{pol}}{23{,}6\ \text{pol}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{pol/pol}$$

que é o mesmo valor que encontramos usando as unidades SI. No entanto, usualmente, quando os comprimentos e deformações são expressos em polegadas ou micropolegadas (μpol), costuma-se manter as unidades originais na expressão obtida para a deformação específica. Em nosso exemplo, a deformação específica seria escrita como $\epsilon = 250 \times 10^{-6}$ pol/pol ou, alternativamente, como $\epsilon = 250\ \mu$pol/pol.

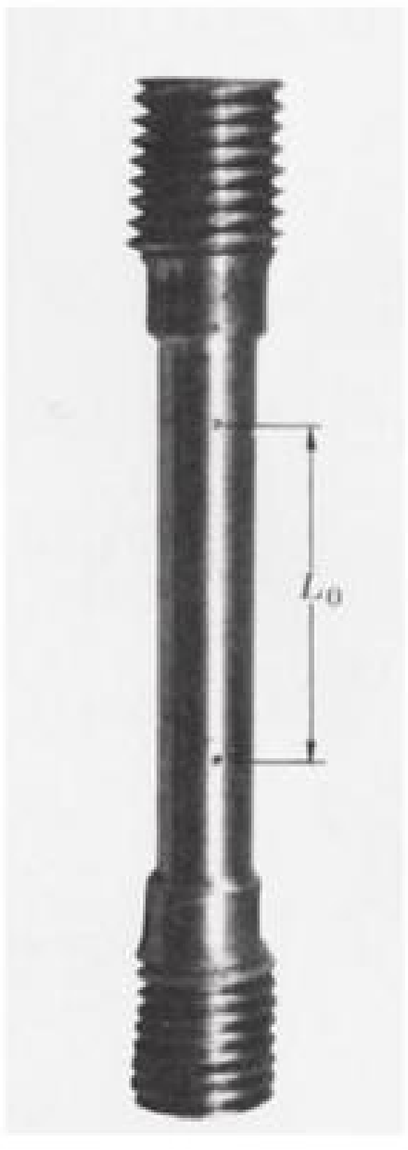


Fig. 2.6 Corpo de prova típico para ensaio de tração.

2.3. Diagrama tensão-deformação

Vimos na Seção 2.2 que o diagrama que representa a relação entre tensão e deformação específica em determinado material é uma característica importante do material. Para obter o diagrama tensão-deformação de um material, geralmente se executa um *ensaio de tração* em um corpo de prova do material. A Fig. 2.6 mostra um tipo de corpo de prova usual. A área da seção transversal da parte central cilíndrica do corpo de prova foi determinada com precisão e foram feitas duas marcas de referência naquela parte a uma distância L_0 uma da outra. A distância L_0 é conhecida como *comprimento de referência* do corpo de prova.

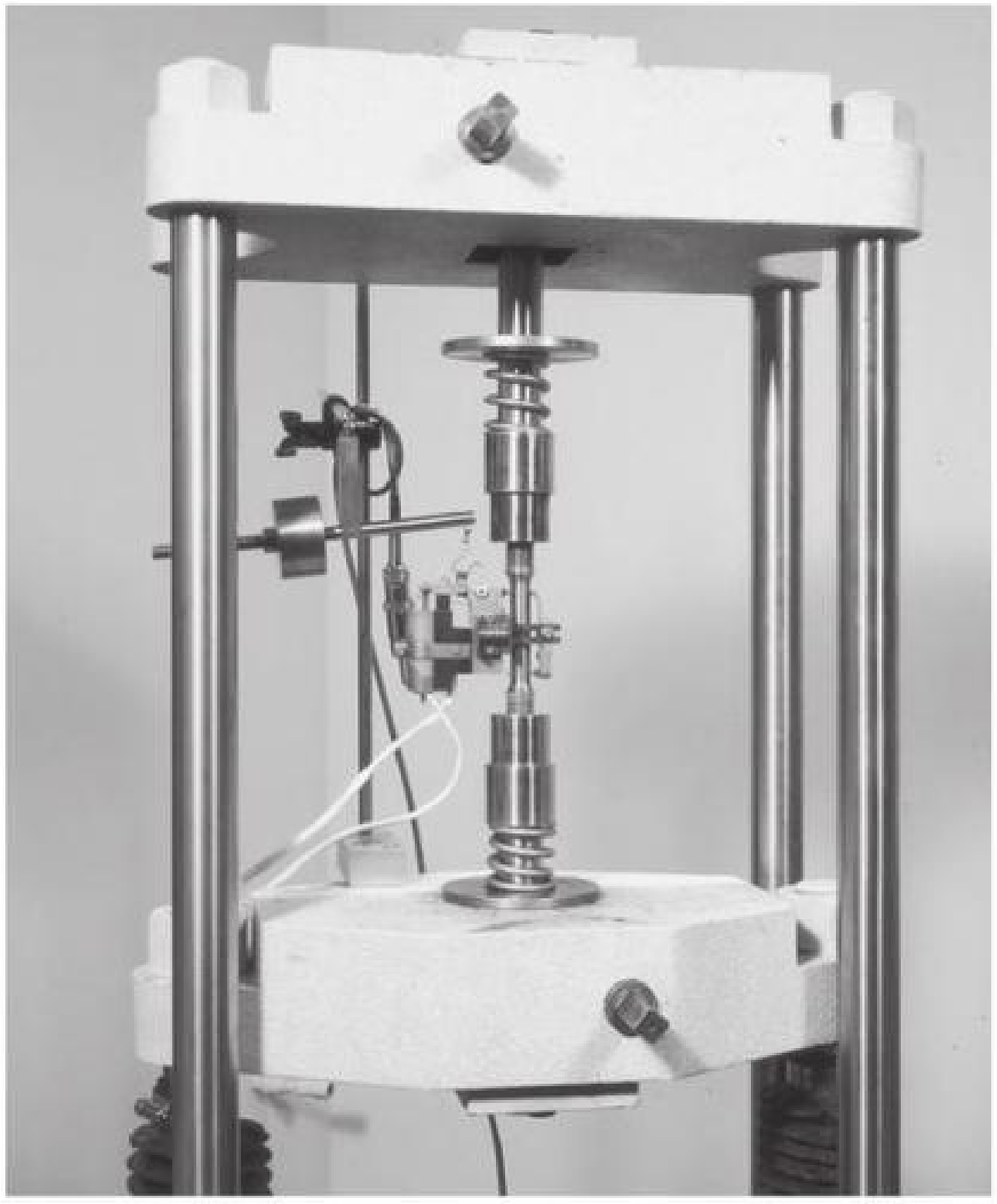


Fig. 2.7 Esta máquina é utilizada para ensaios de corpos de prova a tração, como aqueles mostrados neste capítulo.

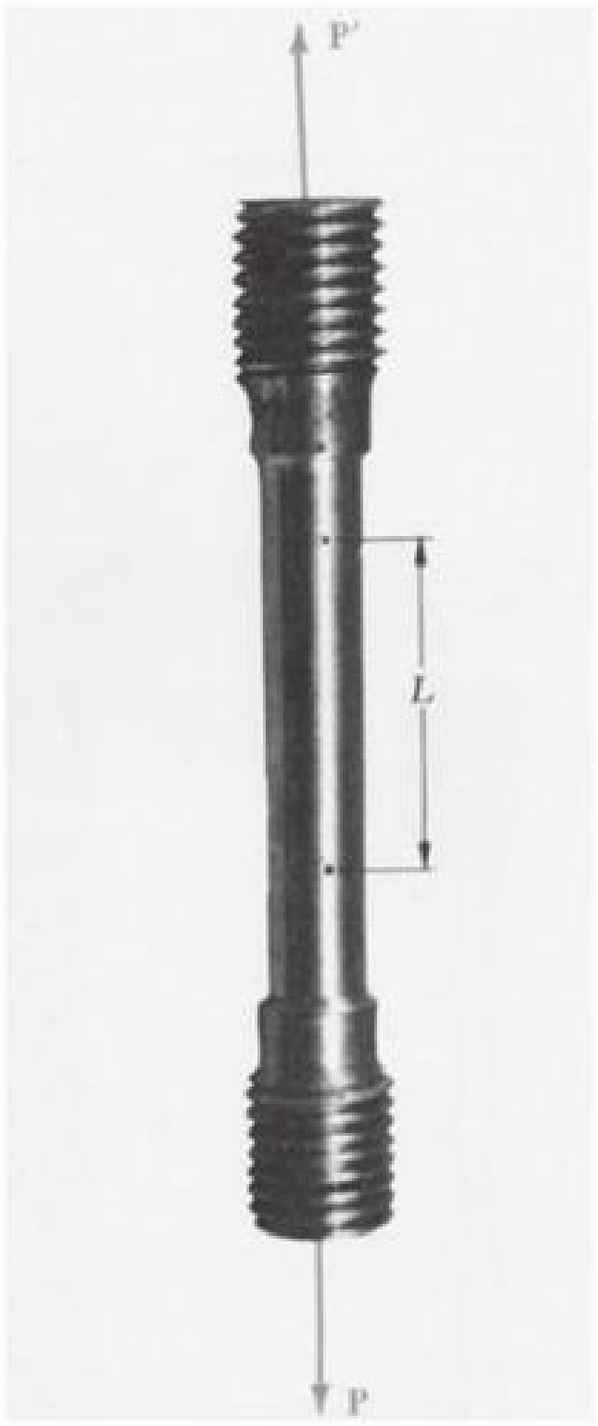
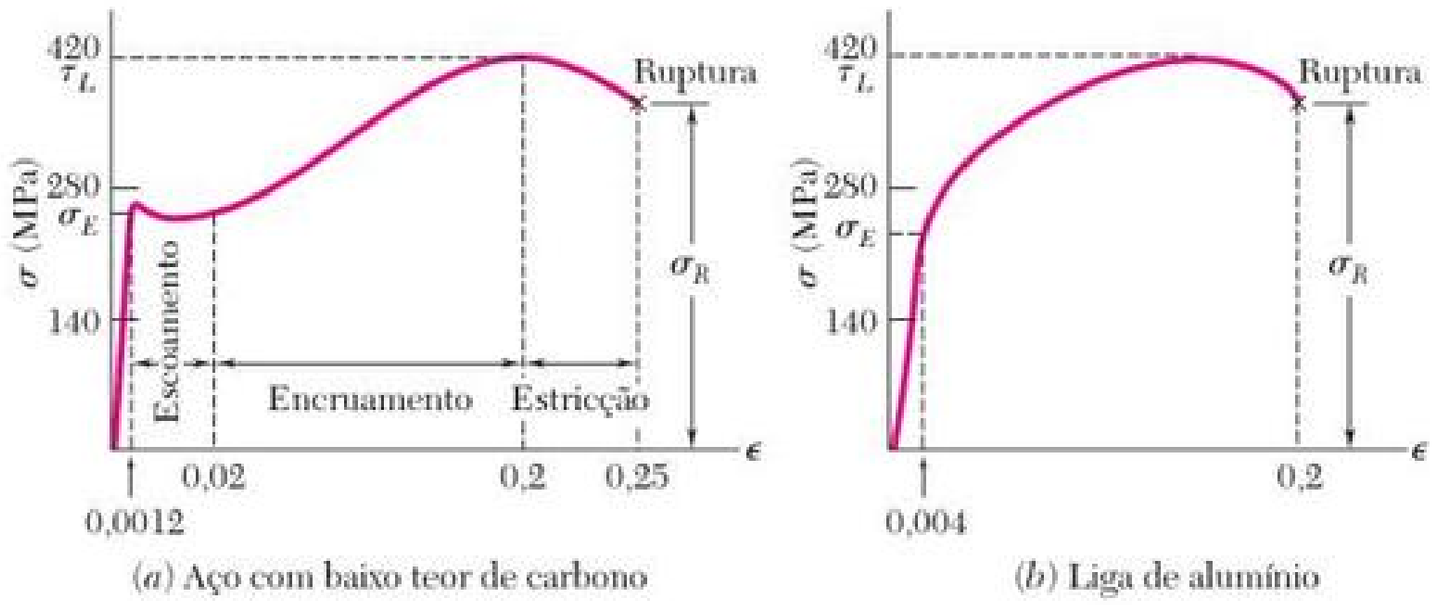


Fig. 2.8 Corpo de prova com carga de tração.

O corpo de prova é então colocado em uma máquina de teste (Fig. 2.7), utilizada para aplicar uma carga centrada **P**. À medida que a carga **P** aumenta, a distância L entre as duas marcas de referência também aumenta (Fig. 2.8). A distância L é medida com um extensômetro, e o alongamento $\delta = L - L_0$ é registrado para cada valor de P. Em geral usa-se simultaneamente um segundo extensômetro para medir e registrar a alteração no diâmetro do corpo de prova. Para cada par de leituras P e δ é calculada a tensão σ dividindo-se P pela área original A_0 da seção transversal do corpo de prova, e a deformação específica ϵ é obtida dividindo-se o alongamento δ pela distância original L_0 entre as duas marcas de referência. O diagrama tensão-deformação pode então ser obtido colocando-se ϵ como abscissa e σ como ordenada.

Os diagramas tensão-deformação dos materiais variam muito, e ensaios de tração diferentes executados com o mesmo material podem produzir resultados diferentes, dependendo da temperatura do corpo de prova e da velocidade de aplicação da carga. No entanto, é possível distinguir algumas características comuns entre os diagramas tensão-deformação de vários grupos de materiais e, assim, dividir os materiais em duas categorias principais com base nessas características, ou seja, materiais *dúcteis* e materiais *frágeis*.

Os materiais dúcteis, como o aço estrutural e as ligas de muitos outros metais, são caracterizados por sua capacidade de *escoar* na temperatura ambiente. À medida que o corpo de prova é submetido a uma carga crescente, seu comprimento aumenta linearmente a uma taxa muito baixa, inicialmente. Assim, a parte inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta com



(*a*) Aço com baixo teor de carbono (*b*) Liga de alumínio

Fig. 2.9 Diagramas tensão-deformação de dois materiais dúcteis típicos.

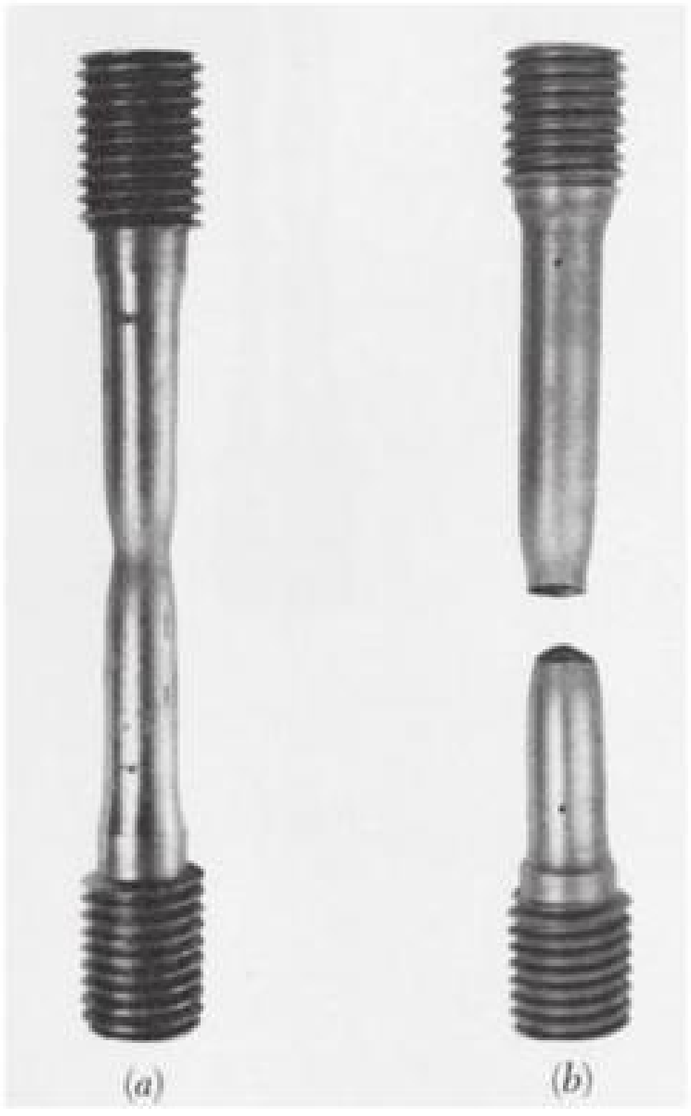


Fig. 2.10 Corpo de prova ensaiado de um material dúctil.

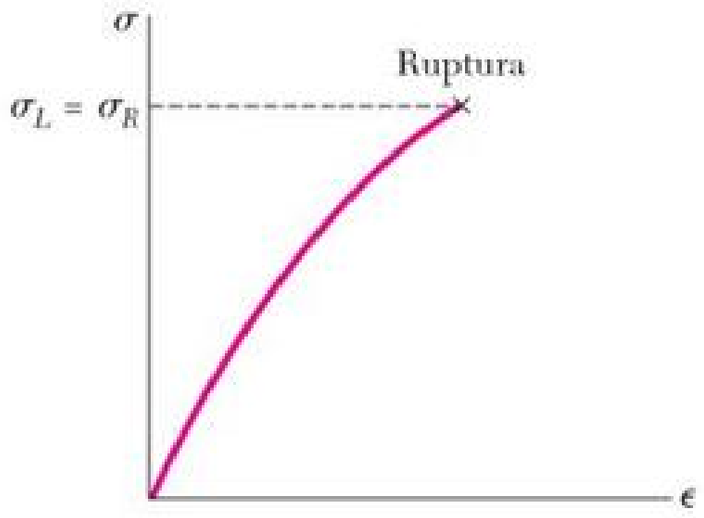


Fig. 2.11 Diagrama tensão-deformação para um material frágil típico.

inclinação bastante acentuada (Fig. 2.9). No entanto, após alcançar um valor crítico de tensão σ_E, o corpo de prova sofre uma grande deformação com aumento relativamente pequeno da carga aplicada. Essa deformação é provocada por deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas e é devido, portanto, primeiro às tensões de cisalhamento. Conforme podemos notar nos diagramas tensão-deformação de dois materiais dúcteis típicos (Fig. 2.9), o alongamento do corpo de prova após o início do escoamento pode ser até 200 vezes maior do que àquele observado no início do escoamento. Depois de alcançar um certo valor máximo da carga, o diâmetro de uma parte do corpo de prova começa a diminuir, em razão da instabilidade local (Fig. 2.10*a*). Esse fenômeno é conhecido como *estricção*. Depois de iniciada a estricção, cargas mais baixas são suficientes para manter o corpo de prova alongando, até que finalmente se rompa (Fig. 2.10*b*). Notamos que a ruptura ocorre ao longo de uma superfície cônica que forma um ângulo de aproximadamente 45° com a superfície original do corpo de prova. Isso indica que o cisalhamento é o principal responsável pela falha dos materiais dúcteis, e confirma o fato de que, sob uma carga axial, as tensões de cisalhamento são maiores nos planos que formam um ângulo de 45° com a carga (cf. Seção 1.11). A tensão σ_E, na qual o escoamento é iniciado, é chamada de *resistência ao escoamento* do material, a tensão σ_L correspondente à carga máxima aplicada ao corpo de prova é conhecida como *limite de resistência*, e a tensão σ_R, correspondente à ruptura, é chamada de *resistência à ruptura.*

Materiais frágeis, que incluem ferro fundido, vidro e pedra, são caracterizados pelo fato de que a ruptura ocorre sem nenhuma mudança prévia notável na taxa de alongamento (Fig. 2.11). Para os materiais frágeis, não há diferença entre o limite de resistência e a resistência à ruptura. E, também, a deformação no instante da ruptura é muito menor para materiais frágeis que para materiais dúcteis. Na Fig. 2.12, notamos a falta de estricção no corpo de prova no caso de um material frágil, e que a ruptura ocorre ao longo de uma superfície perpendicular à carga. Concluímos dessa observação que as tensões normais são as principais responsáveis pela falha de materiais frágeis.†

† Os ensaios de tração descritos nesta seção são executados na temperatura ambiente. No entanto, um material dúctil na temperatura ambiente pode apresentar as características de um material frágil a temperaturas muito baixas, ao passo que um material normalmente frágil pode se comportar de maneira dúctil a temperaturas muito altas. Portanto, em temperaturas que não a ambiente, podemos nos referir a *um material em estado dúctil* ou a *um material em estado frágil*, em vez de dizer que o material é dúctil ou frágil.

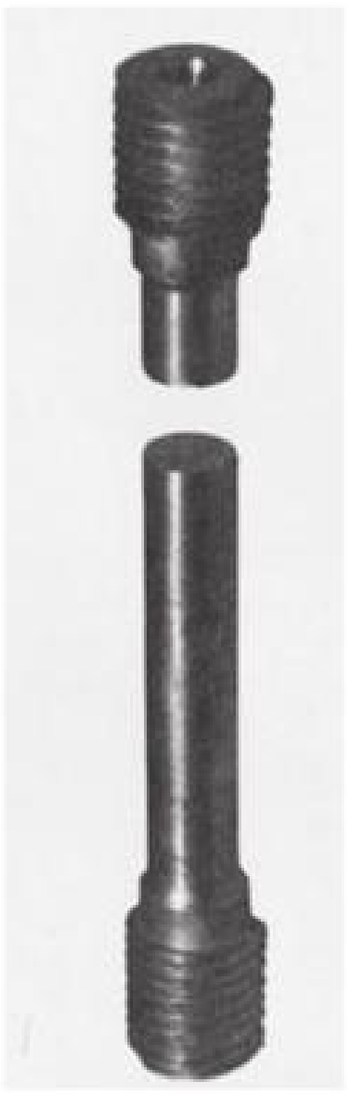


Fig. 2.12 Corpo de prova ensaiado de um material frágil.

Os diagramas tensão-deformação da Fig. 2.9 mostram que o aço estrutural e o alumínio, embora sejam ambos dúcteis, têm diferentes características de escoamento. No caso do aço estrutural (Fig. 2.9*a*), a tensão permanece constante em um grande intervalo de valores da deformação após o início do escoamento. Depois a tensão tem de ser aumentada para manter o corpo de prova se alongando, até ser atingido o máximo valor de σ_L. Isso se dá em razão de uma propriedade do material conhecida como encruamento. A resistência ao escoamento do aço estrutural pode ser determinada durante o ensaio de tração observando-se a carga indicada no mostrador da máquina de ensaio. Após um aumento constante, observa-se que a carga cai subitamente para um valor ligeiramente inferior, mantido por um certo período enquanto o corpo de prova continua se alongando. Em um ensaio executado cuidadosamente, é possível distinguir entre o *ponto de escoamento superior*, que corresponde à carga atingida imediatamente antes do início do escoamento, e o *ponto de escoamento inferior*, que corresponde à carga necessária para manter o escoamento. Como o ponto de escoamento superior é transitório, deve ser utilizado o ponto de escoamento inferior para determinar a resistência ao escoamento do material.

No caso do alumínio (Fig. 2.9*b*) e de muitos outros materiais dúcteis, o início do escoamento não é caracterizado por uma parte horizontal da curva tensão-deformação. Em vez disso, a tensão continua aumentando, embora não linearmente, até ser alcançado o limite de resistência. Começa então a estricção, que leva eventualmente à ruptura. Para esses materiais, a resistência ao escoamento σ_E pode ser definida pelo método do desvio. A resistência ao escoamento para um desvio de 0,2%, por exemplo, é obtida traçando-se através do ponto do eixo horizontal de abcissa $\epsilon = 0{,}2\%$ (ou $\epsilon = 0{,}002$) uma linha paralela à parte reta inicial da curva do diagrama tensão-deformação (Fig. 2.13). A tensão σ_E corresponde ao ponto E obtido dessa maneira e é definido como a resistência ao escoamento a 0,2% da origem.

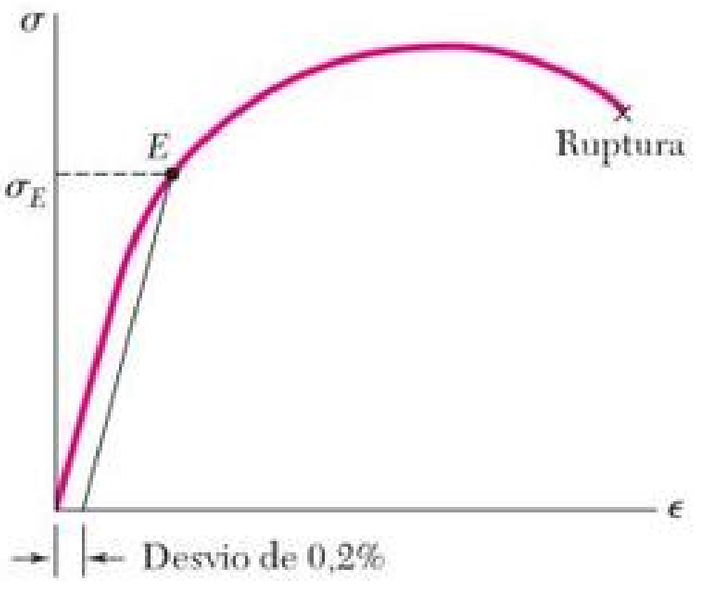


Fig. 2.13 Determinação da resistência ao escoamento pelo método do desvio.

Uma medida-padrão da ductilidade de um material é sua *deformação percentual*, definida como

$$\text{Deformação percentual} = 100\,\frac{L_R - L_0}{L_0}$$

em que L_0 e L_R são, respectivamente, o comprimento inicial do corpo de prova e seu comprimento final na ruptura. O alongamento mínimo especificado para um comprimento de referência de 50 mm, usualmente empregado para aços com resistência ao escoamento de até 345 MPa, é 21%. Isso significa que a deformação média na ruptura deverá ser de pelo menos 0,21 mm/mm.

Outra medida da ductilidade, às vezes usada, é a *redução percentual da área*, definida como

$$\text{Redução percentual da área} = 100\,\frac{A_0 - A_R}{A_0}$$

em que A_0 e A_R são, respectivamente, a área da seção transversal inicial do corpo de prova e sua área de seção transversal mínima na ruptura. Para o aço estrutural, reduções percentuais em área de 60% a 70% são comuns.

Até aqui, discutimos apenas os ensaios de tração. Se um corpo de prova feito de um material dúctil fosse submetido a uma carga de compressão em lugar de tração, a curva tensão-deformação específica obtida seria essencialmente a mesma em sua parte inicial reta e no início da parte correspondente ao escoamento e encruamento. É particularmente notável o fato de que, para determinado aço, a resistência ao escoamento é a mesma tanto na tração como na compressão. Para valores maiores de deformação específica, as curvas tensão-deformação na tração e na compressão divergem, e deve-se notar que a estricção não pode ocorrer na compressão. Para muitos materiais frágeis, sabe-se que o limite de resistência de compressão é muito maior que o limite de resistência de tração. Isso se deve à presença de falhas, como trincas microscópicas ou cavidades, que tendem a enfraquecer o material na tração, embora não afete significativamente sua resistência à falha em compressão.

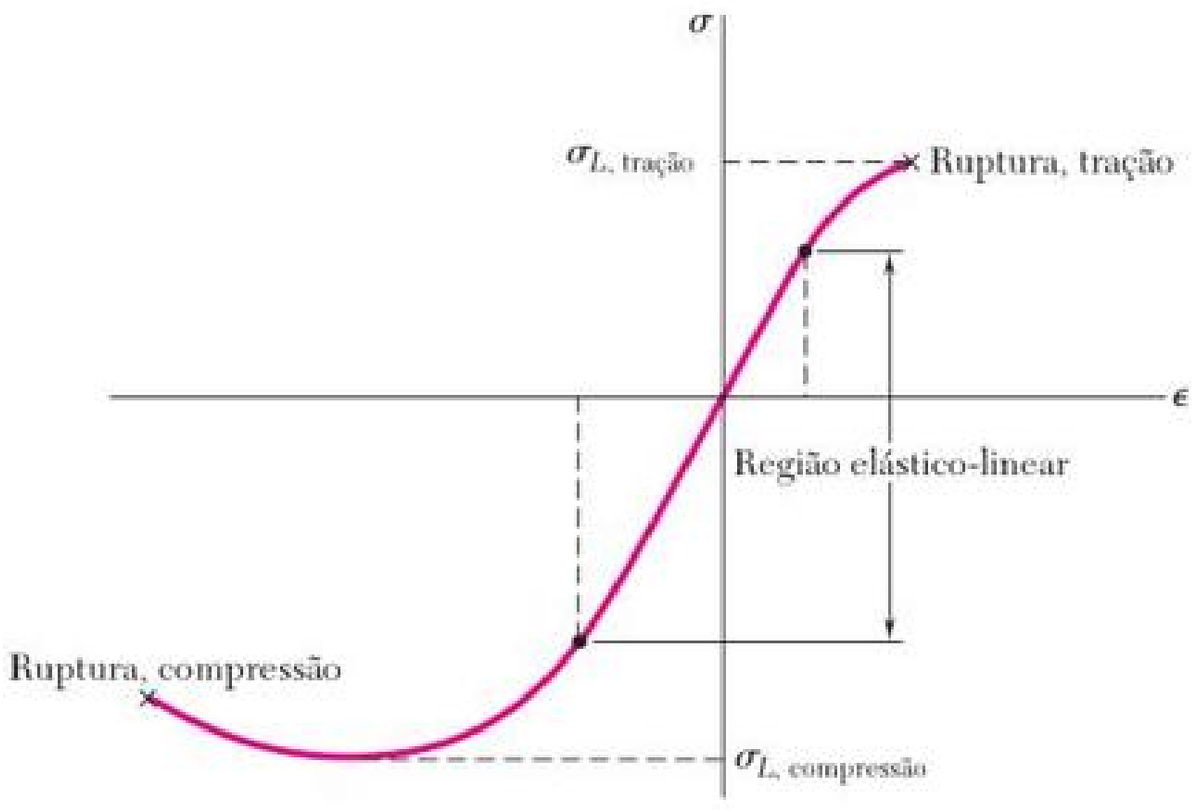


Fig. 2.14 Diagrama tensão-deformação para o concreto.

Um exemplo de material frágil com propriedades diferentes na tração e na compressão é o *concreto*, cujo diagrama tensão-deformação é mostrado na Fig. 2.14. No lado da tração do diagrama, observamos primeiro uma região elástico-linear na qual a deformação é proporcional à tensão. Depois de ter alcançado o ponto de escoamento, a deformação aumenta mais rápido do que a tensão até ocorrer a ruptura. O comportamento do material na compressão é diferente. Primeiro, a região elástico-linear é significativamente maior. Segundo, não ocorre a ruptura quando a tensão alcança seu valor máximo. Em vez disso, a tensão diminui em intensidade enquanto a deformação continua aumentando até ocorrer a ruptura. Note que o módulo de elasticidade, representado pela inclinação da curva tensão-deformação em sua parte linear, é o mesmo na tração e na compressão. Isso vale para a maioria dos materiais frágeis.

*2.4. Tensões e deformações específicas verdadeiras

Recordamos que a tensão representada nos diagramas das Figs. 2.9 e 2.11 foi obtida dividindo-se a força P pela área A_0 da seção transversal do corpo de prova. Esta área foi medida antes de ocorrer qualquer deformação. Como a área da seção transversal do corpo de prova diminui à medida que P aumenta, o gráfico da tensão indicada em nossos diagramas não representa a tensão verdadeira no corpo de prova. A diferença entre a *tensão de engenharia* $\sigma = P/A_0$, já calculada, e a *tensão verdadeira* $\sigma_v = P/A$, obtida dividindo-se P pela área A da seção transversal do corpo de prova deformado, torna-se visível em materiais dúcteis após o início do escoamento. Embora a tensão de engenharia σ, que é diretamente proporcional à força P, diminua com P durante a fase de estricção, observa-se que a tensão verdadeira σ_v, que é proporcional a P mas também inversamente proporcional a A, continua aumentando até ocorrer a ruptura do corpo de prova.

Muitos cientistas também usam uma definição de deformação específica diferente daquela de *deformação específica de engenharia* $\epsilon = \delta/L_0$. Em vez de usar o alongamento total δ e o valor original L_0 do comprimento de referência, eles usam todos os valores sucessivos de L que registraram. Dividindo cada incremento ΔL da distância entre as marcas de referência pelo valor correspondente de L, obtêm uma deformação específica elementar $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Somando os valores sucessivos de $\Delta\epsilon$, definem a deformação específica verdadeira ϵ_v:

$$\epsilon_v = \Sigma\Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Substituindo a somatória pela integral, pode-se também expressar a deformação específica verdadeira da seguinte forma:

$$\epsilon_v = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_0} \tag{2.3}$$

O diagrama obtido construindo-se o gráfico da tensão verdadeira em função da deformação específica verdadeira (Fig. 2.15) reflete mais precisamente o comportamento do material. Conforme já vimos, não há nenhum decrés-

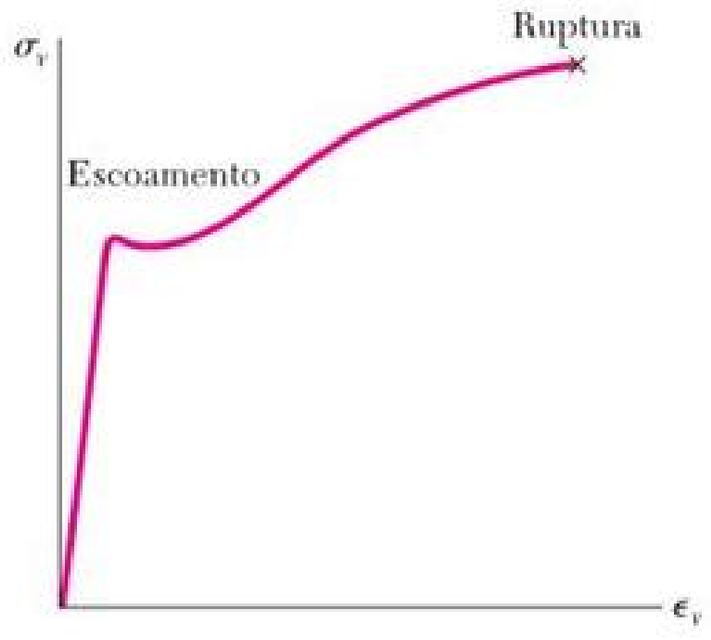


Fig. 2.15 Tensão verdadeira em função da deformação específica verdadeira para um material dúctil típico.

cimo na tensão verdadeira durante a fase de estricção. Os resultados obtidos dos ensaios de tração e de compressão resultarão essencialmente no mesmo gráfico quando utilizadas a tensão verdadeira e a deformação específica verdadeira. Este não é o caso para grandes valores de deformação específica quando se utiliza o gráfico da tensão de engenharia em função da deformação específica de engenharia. No entanto, os engenheiros, cuja responsabilidade é determinar se uma carga P produzirá tensões e deformações aceitáveis em determinado componente, desejarão usar um diagrama baseado na tensão de engenharia $\sigma = P/A_0$ e na deformação específica de engenharia $\epsilon = \delta/L_0$, visto que essas expressões envolvem dados que eles têm disponíveis, ou seja, a área A_0 da seção transversal e o comprimento L_0 do componente em seu estado não deformado.

2.5. Lei de Hooke; módulo de elasticidade

Muitas estruturas em engenharia são projetadas para sofrer deformações relativamente pequenas, que envolvem somente a parte reta do correspondente diagrama tensão-deformação. Para essa parte inicial do diagrama (Fig. 2.9), a tensão σ é diretamente proporcional à deformação específica ϵ, e podemos escrever

$$\sigma = E\,\epsilon \tag{2.4}$$

Essa relação é conhecida como *lei de Hooke*, em homenagem ao matemático inglês Robert Hooke (1635-1703). O coeficiente E é chamado de *módulo de elasticidade* do material envolvido, ou também *módulo de Young*, em homenagem ao cientista inglês Thomas Young (1773-1829). Como a deformação específica ϵ é uma quantidade adimensional, o módulo E é expresso nas mesmas unidades da tensão σ, ou seja, em pascal ou em um de seus múltiplos se forem utilizadas unidades do SI, e em psi ou ksi se forem utilizadas unidades do sistema inglês de unidades.

O maior valor da tensão para o qual a lei de Hooke pode ser utilizada para determinado material é conhecido como o *limite de proporcionalidade* daquele material. No caso dos materiais dúcteis que possuem um ponto de escoamento bem definido, como na Fig. 2.9*a*, o limite de proporcionalidade quase coincide com o ponto de escoamento. Para outros materiais, o limite de proporcionalidade não pode ser definido tão facilmente, visto que é difícil determinar com precisão o valor da tensão σ para o qual a relação entre σ e ϵ deixa de ser linear. Contudo, em razão dessa dificuldade, podemos concluir para esses materiais que o uso da lei de Hooke para valores de tensão ligeiramente maiores que o limite proporcional real não resultará em um erro significativo.

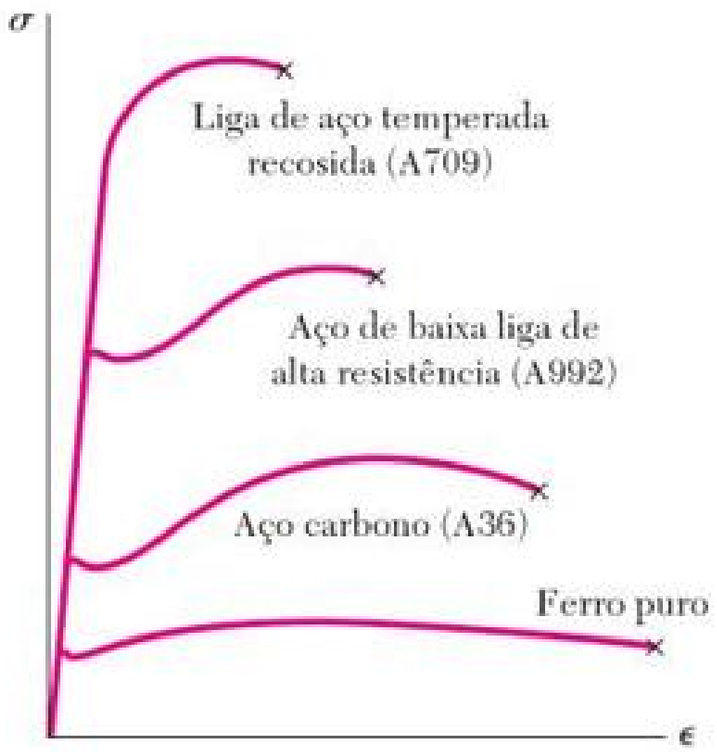


Fig. 2.16 Diagramas tensão-deformação para o ferro e diferentes tipos de aço.

Algumas das propriedades físicas dos metais estruturais, como resistência, ductilidade e resistência à corrosão, podem ser muito afetadas pela inclusão de elementos de liga, tratamento térmico e processos de fabricação utilizados. Por exemplo, observamos com base nos diagramas tensão-deformação do ferro puro e de três diferentes tipos de aço (Fig. 2.16) que existem grandes variações na resistência ao escoamento, limite de resistência e deformação específica final (ductilidade) entre esses quatro metais. No entanto, todos eles possuem o mesmo módulo de elasticidade; em outras palavras, a "rigidez", ou capacidade em resistir a deformações dentro da região linear é a mesma. Portanto, se for usado um aço de alta resistência em lugar de um aço de baixa resistência em determinada estrutura, e se todas as dimensões forem mantidas com os mesmos valores, a estrutura terá uma capacidade de carga maior, mas sua rigidez permanecerá inalterada.

Para cada um dos materiais considerados até agora, a relação entre tensão normal e deformação específica normal, $\sigma = E\epsilon$, é independente da direção de carregamento. Isso porque as propriedades mecânicas de cada material, incluindo seu módulo de elasticidade E, são independentes da direção considerada. Dizemos que esses materiais são *isotrópicos*. Materiais cujas propriedades dependem da direção considerada são chamados de *anisotrópicos*. Uma classe importante de materiais anisotrópicos consiste em *materiais compósitos reforçados com fibras*.

Esses materiais compósitos são obtidos incorporando-se fibras de um material resistente e rígido em um material mais fraco e menos rígido, chamado de *matriz*. Materiais típicos utilizados como fibras são carbono, vidro e polímeros, enquanto vários tipos de resinas são utilizados como matriz. A Fig. 2.17 mostra uma camada, ou *lâmina*, de um material compósito que consiste de uma grande quantidade de fibras paralelas embutidas em uma matriz. Uma força axial aplicada à lamina ao longo do eixo x, ou seja, em uma direção paralela às fibras, provocará uma tensão normal σ_x na lâmina e uma deformação específica normal ϵ_x correspondente. A lei de Hooke estará satisfeita à medida que a carga aumenta, desde que não seja ultrapassado o limite elástico do material da lâmina. Analogamente, se forças axiais forem aplicadas ao longo dos eixos y e z, ou seja, em direções perpendiculares às fibras, tensões normais σ_y e σ_z, respectivamente, serão criadas como, também, as respectivas deformações específicas normais ϵ_y e ϵ_z sempre satisfazendo à lei de Hooke. No entanto, os módulos de elasticidade E_x, E_y e E_z correspondentes, respectivamente, a cada um dos carregamentos acima, serão diferentes. Em virtude de as fibras serem paralelas ao eixo x, a lâmina oferecerá uma resistência à deformação muito maior a uma força direcionada ao longo do eixo x que a uma força direcionada ao longo dos eixos y ou z. Portanto, E_x será muito maior que E_y ou E_z.

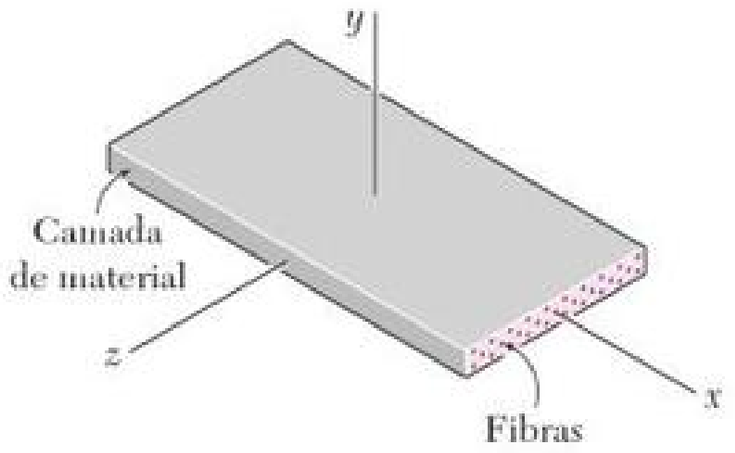


Fig. 2.17 Camada de material compósito reforçado com fibras.

Um plano *laminado* é obtido superpondo-se uma quantidade de placas ou lâminas. Se o laminado for submetido somente a uma força axial provocando tração, as fibras em todas as camadas deverão ter a mesma orientação da força para se obter a maior resistência possível. Contudo, se o laminado estiver em compressão, o material da matriz pode não ser suficientemente forte para evitar a dobra ou a flambagem das fibras. A estabilidade lateral do laminado pode ser então aumentada posicionando-se algumas das camadas de maneira que suas fibras fiquem perpendiculares à força. Posicionando algumas camadas de modo que suas fibras fiquem orientadas a 30°, 45° ou 60° em relação à força, pode-se também aumentar a resistência do laminado ao cisalhamento no plano. Os materiais compósitos reforçados com fibras serão discutidos em mais detalhes na Seção 2.16, onde será considerado seu comportamento sob carregamentos multiaxiais.

2.6. Comportamento elástico e comportamento plástico de um material

Se as deformações específicas provocadas em um corpo de prova pela aplicação de determinada força desaparecem quando a força é removida, dizemos que o material se comporta *elasticamente*. O maior valor da tensão para o qual o material comporta-se elasticamente é chamado de *limite elástico* do material.

Se o material tem um ponto de escoamento bem definido, como na Fig. 2.9*a*, o limite elástico, o limite de proporcionalidade (Seção 2.5) e o ponto de escoamento são essencialmente iguais. Em outras palavras, o material

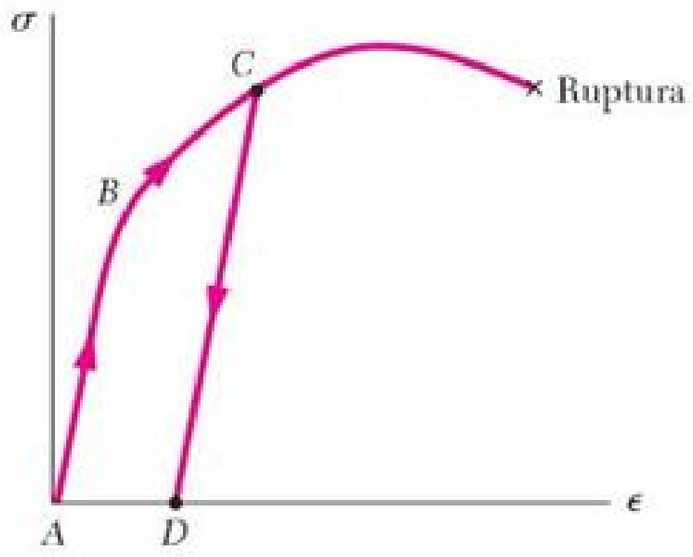


Fig. 2.18

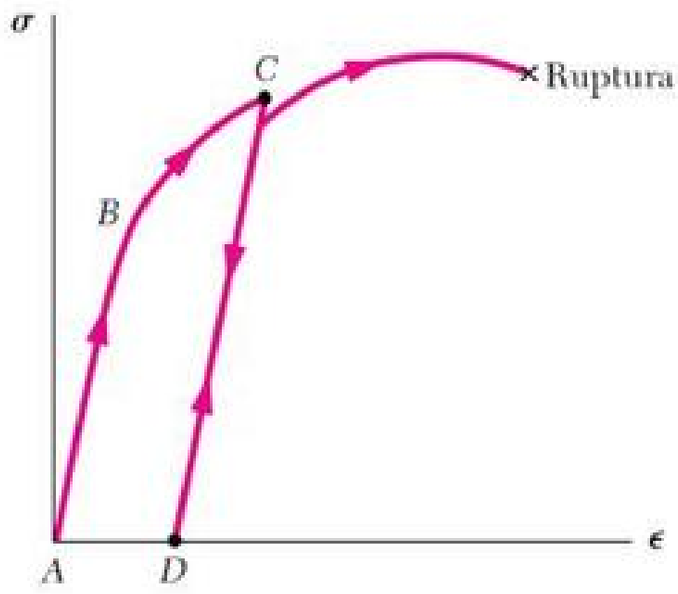


Fig. 2.19

comporta-se elástica e linearmente desde que a tensão seja mantida abaixo do ponto de escoamento. No entanto, se for atingido o ponto de escoamento, ele deve ocorrer conforme descrito na Seção 2.3, e quando a força é removida, a tensão e a deformação específica diminuem de forma linear, ao longo de uma linha *CD* paralela à parte reta *AB* da curva de carregamento (Fig. 2.18). O fato de ϵ não retornar a zero depois de a força ter sido removida indica que ocorreram *deformações permanentes* ou *plásticas*. Para muitos materiais, a deformação plástica não depende somente do valor máximo atingido pela tensão, mas também do tempo decorrido até que o carregamento seja removido. A parte da deformação plástica que depende da tensão é conhecida como *escorregamento*, e a parte que depende do tempo, que também é influenciada pela temperatura, é conhecida como *fluência*.

Quando um material não possui um ponto de escoamento bem definido, o limite elástico não pode ser determinado com precisão. No entanto, supor o limite elástico igual à resistência ao escoamento conforme definido pelo método do desvio (Seção 2.3) resulta apenas em um pequeno erro. Sem dúvida, examinando a Fig. 2.13, notamos que a parte reta utilizada para determinar o ponto *E* também representa a curva de descarregamento depois de ter alcançado a máxima tensão σ_E. Embora o material não se comporte de forma verdadeiramente elástica, a deformação plástica resultante é tão pequena quanto o desvio selecionado.

Se o corpo de prova for carregado e descarregado (Fig. 2.19) e carregado novamente, a nova curva de carregamento seguirá bem próxima à curva de descarregamento até quase chegar ao ponto *C*; então ela virará para a direita e se conectará com a porção curvada do diagrama tensão-deformação original. Observe que a parte reta da nova curva de carregamento é mais longa do que a parte correspondente da curva inicial. Assim, o limite de proporcionalidade e o limite elástico aumentaram em consequência do encruamento que ocorreu durante o carregamento anterior do corpo de prova. No entanto, como o ponto de ruptura *R* se manteve inalterado, a ductilidade do corpo de prova, que agora deve ser medida a partir do ponto *D*, diminuiu.

Em nossa discussão, consideramos que o corpo de prova foi carregado duas vezes na mesma direção, isto é, que ambas as forças eram forças de tração. Vamos agora considerar o caso quando é aplicada uma segunda carga em uma direção oposta àquela da primeira carga.

Suponha que o material seja um aço doce, para o qual a resistência ao escoamento seja a mesma em tração e em compressão. A força inicial, de tração, é aplicada até ser alcançado o ponto *C* no diagrama tensão-deformação (Fig. 2.20). Após o descarregamento (ponto *D*), é aplicada uma força de compressão fazendo o material alcançar o ponto *H*, onde a tensão é igual a $-\sigma_E$. Notamos que a parte *DH* do diagrama tensão-deformação é curva e não mostra nenhum ponto de escoamento claramente definido. Isso é chamado de *efeito Bauschinger*. À medida que a força de compressão é mantida, o material escoa ao longo da linha *HJ*.

Se a carga é removida após alcançar o ponto *J*, a tensão retorna a zero ao longo da linha *JK*, e notamos que a inclinação de *JK* é igual ao módulo de elasticidade *E*. A deformação permanente resultante *AK* pode ser positiva, negativa, ou zero, dependendo dos comprimentos dos segmentos *BC* e *HJ*. Se uma força de tração for aplicada novamente ao corpo de prova, a parte do diagrama tensão-deformação começando em *K* (linha tracejada) curvará para cima e para a direita até alcançar a tensão de escoamento σ_E.

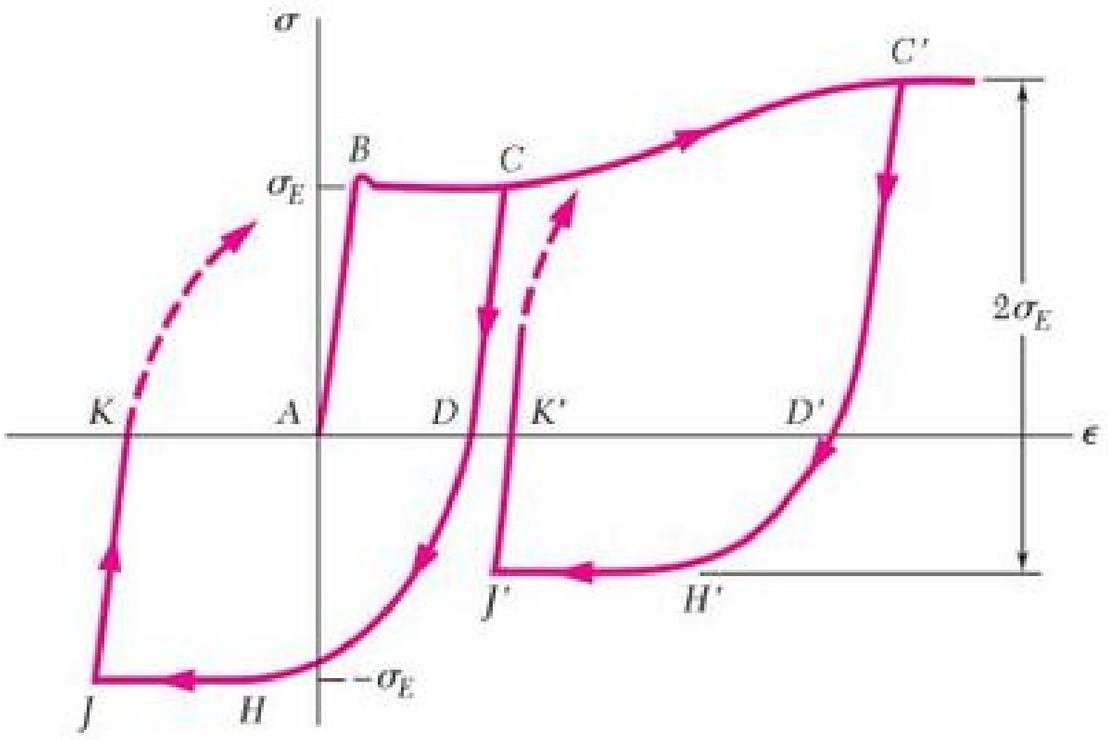


Fig. 2.20

Se o carregamento inicial for grande o suficiente para provocar encruamento do material (ponto C'), o descarregamento ocorrerá ao longo da linha $C'D'$. À medida que é aplicada a força reversa, a tensão se torna de compressão, alcançando seu valor máximo em H' e mantendo-a à medida que o material escoa ao longo da linha $H'J'$. Notamos que enquanto o valor máximo da tensão de compressão é menor que σ_E, a variação total na tensão entre C' e H' ainda é igual a $2\sigma_E$.

Se o ponto K ou K' coincide com a origem A do diagrama, a deformação permanente é igual a zero e pode parecer que o corpo de prova retornou à sua condição original. No entanto, terão ocorrido alterações internas e, embora a mesma sequência de carregamento possa ser repetida, o corpo de prova romperá sem qualquer aviso após algumas poucas repetições. Isso indica que as deformações plásticas excessivas às quais o corpo de prova estava submetido provocaram uma alteração radical nas características do material. Portanto, forças reversas na região plástica raramente são permitidas e só podem ocorrer sob condições rigorosamente controladas. Essas situações ocorrem no endireitamento de material danificado e no alinhamento final de uma estrutura ou máquina.

2.7. Carregamentos repetidos; fadiga

Nas seções anteriores consideramos o comportamento de um corpo de prova submetido a uma carga axial. Lembramos que, se a tensão máxima no corpo de prova não exceder o limite elástico do material, o corpo de prova retornará à sua condição inicial quando a carga for removida. Você pode concluir que determinada carga pode ser repetida muitas vezes, desde que a tensão permaneça na região elástica. Essa conclusão é correta para cargas repetidas algumas dezenas ou mesmo centenas de vezes. No entanto, conforme você verá, isso não é correto quando a carga é repetida milhares ou milhões de vezes. Nesses casos, ocorrerá a ruptura a uma tensão muito menor do que a resistência à ruptura estática; esse fenômeno é conhecido como *fadiga*. Uma falha por fadiga é de natureza frágil, mesmo para materiais normalmente dúcteis.

A fadiga deve ser levada em conta no projeto de todos os componentes estruturais e de máquinas submetidos a cargas repetidas ou flutuantes. O número de ciclos de carregamento que se pode esperar durante a vida útil de um componente varia grandemente. Por exemplo, uma viga que suporta um guindaste industrial pode ser carregada até dois milhões de vezes em 25 anos (cerca de 300 carregamentos por dia de trabalho); um virabrequim do motor de um carro será carregado aproximadamente meio bilhão de vezes se o carro rodar 300 000 km, e uma pá de turbina pode ser carregada várias centenas de bilhões de vezes durante sua vida útil.

Alguns carregamentos têm natureza flutuante. Por exemplo, o tráfego de veículos sobre uma ponte provocará níveis de tensão que flutuarão sobre o nível de tensão em razão do próprio peso da ponte. Uma condição mais severa ocorre quando há uma inversão completa da carga durante o ciclo de carregamento. Por exemplo, as tensões no eixo de um vagão de trem são completamente invertidas a cada meia volta da roda.

O número de ciclos de carregamento necessário para provocar a falha de um corpo de prova por meio da aplicação de cargas cíclicas pode ser determinado experimentalmente para determinado nível de tensão máxima. Se for executada uma série de ensaios usando diferentes níveis de tensão máxima, os dados resultantes podem ser colocados em um gráfico como uma curva σ-n. Para cada ensaio, deve-se construir uma curva da tensão máxima σ, como ordenada, e o número de ciclos n como abcissa. Por causa do grande número de ciclos necessários para a ruptura, o número n de ciclos é apresentado em escala logarítmica.

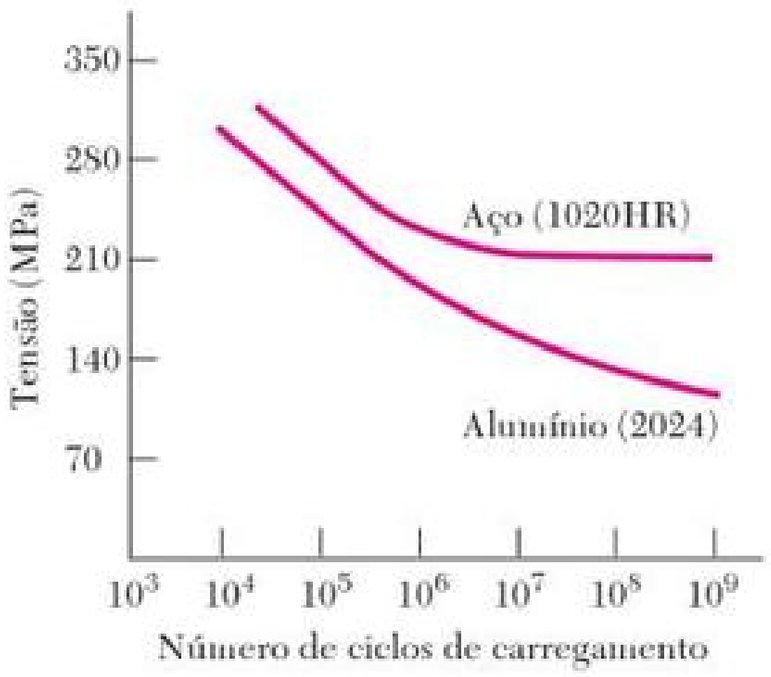


Fig. 2.21

A Fig. 2.21 mostra uma curva típica σ-n para o aço. Notamos que, se a tensão máxima aplicada for alta, serão necessários relativamente poucos ciclos para causar a ruptura. À medida que a intensidade da tensão máxima é reduzida, o número de ciclos necessário para provocar a ruptura aumenta até ser alcançada uma tensão conhecida como *limite de resistência à fadiga*, que é a tensão para a qual não ocorre falha, mesmo para um número indefinidamente grande de ciclos de carregamento. Para um aço de baixo teor de carbono como o aço estrutural, o limite de resistência à fadiga é aproximadamente metade do limite de resistência do aço.

Para metais não-ferrosos como o alumínio e o cobre, uma curva σ-n típica (Fig. 2.21) mostra que a tensão de falha continua a diminuir à medida que aumenta o número de ciclos de carregamento. Para esses metais, define-se o *limite de resistência à fadiga* como a tensão correspondente à falha após um número especificado de ciclos de carregamento, por exemplo, 500 milhões.

O exame de corpos de prova obtidos de eixos, molas ou de outros componentes que falharam em fadiga, mostra que a falha foi iniciada em uma trinca microscópica ou em alguma imperfeição similar. A cada carregamento, a trinca se propagava um pouco. Durante sucessivos ciclos de carregamento, a trinca se propagou pelo material até que a quantidade de material não danificado fosse insuficiente para suportar a carga máxima, ocorrendo falha abrupta por fragilidade. Devido ao fato de que a falha por fadiga pode ser iniciada em qualquer trinca ou imperfeição, as condições da superfície de um corpo de prova têm um efeito importante no valor do limite de resistência à fadiga obtida no ensaio. O limite de resistência à fadiga para corpos de prova usinados e polidos é mais alto do que para os componentes laminados ou forjados, ou para componentes corroídos. Em aplicações no mar ou próximo do mar, ou em outras aplicações onde se espera que haja corrosão, pode-se prever uma redução de 50% no limite de resistência à fadiga.

2.8. Deformações de elementos sob carregamento axial

Considere a barra homogênea BC de comprimento L e seção transversal uniforme de área A submetida a uma força axial centrada **P** (Fig. 2.22). Se a tensão axial resultante $\sigma = P/A$ não ultrapassar o limite de proporcionalidade do material, podemos aplicar a lei de Hooke e escrever

$$\sigma = E\,\epsilon \tag{2.4}$$

da qual se segue que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.5}$$

Lembrando que a deformação específica ϵ foi definida na Seção 2.2 como $\epsilon = \delta/L$, temos

$$\delta = \epsilon\,L \tag{2.6}$$

e substituindo ϵ da Equação (2.5) na Equação (2.6), temos:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

A Equação (2.7) só pode ser utilizada se a barra for homogênea (E constante), se tiver uma seção transversal uniforme de área A e se tiver a força aplicada em suas extremidades. Se a barra estiver carregada em outros pontos, ou se ela consistir em diversas partes com várias seções transversais e possivelmente de diferentes materiais, precisamos dividi-la em partes componentes que satisfaçam individualmente às condições necessárias para a aplicação da Fórmula (2.7). Designando, respectivamente, por P_i, L_i, A_i, e E_i a força interna, comprimento, área da seção transversal e módulo de elasticidade correspondentes à parte i, expressamos a deformação da barra inteira como

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

Lembramos da Seção 2.2 que, no caso de uma barra de seção transversal variável (Fig. 2.5), a deformação específica ϵ depende da posição do ponto Q em que ela é calculada e definida como $\epsilon = d\delta/dx$. Resolvendo $d\delta$ dessa equação, e substituindo ϵ pelo seu valor dado na Equação (2.5), expressamos a deformação de um elemento de comprimento dx como

$$d\delta = \epsilon\,dx = \frac{P\,dx}{AE}$$

A deformação total δ da barra é obtida integrando-se essa expressão sobre o comprimento L da barra:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\,dx}{AE} \tag{2.9}$$

A Fórmula (2.9) deverá ser utilizada em lugar da (2.7), não só quando a área A da seção transversal for uma função de x, mas também quando a força interna P depender de x, como é o caso de uma barra suspensa suportando seu próprio peso.

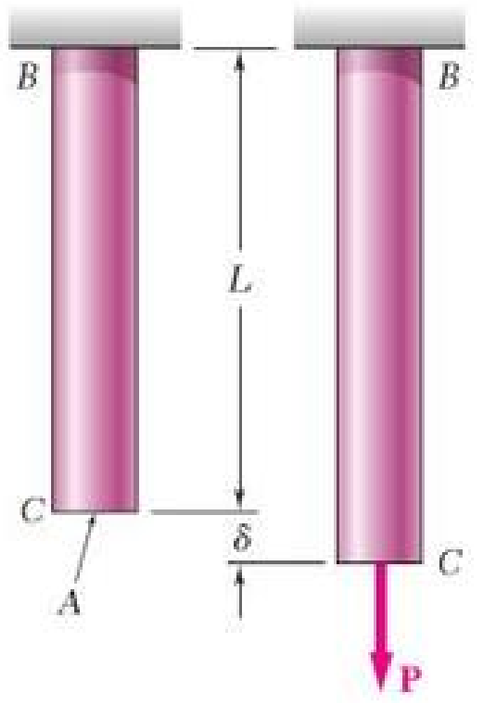


Fig. 2.22

EXEMPLO 2.1

Determine a deformação da barra de aço mostrada na Fig. 2.23*a* submetida às forças dadas ($E = 200$ GPa).

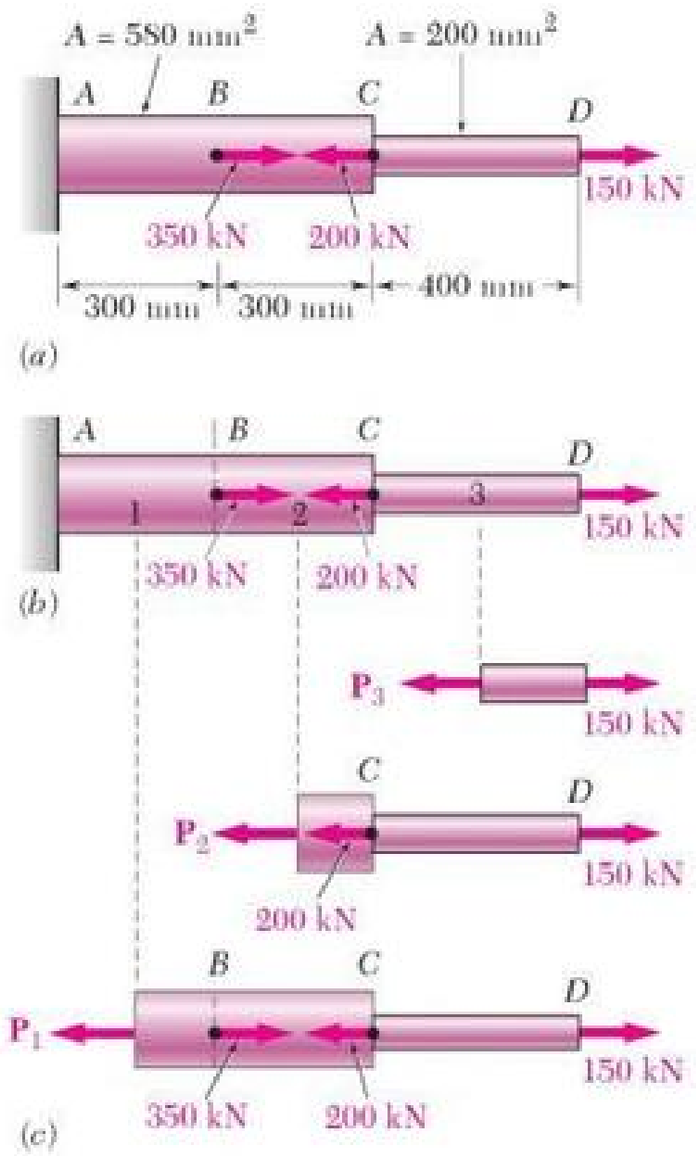


Fig. 2.23

Dividimos a barra em três partes componentes mostradas na Fig. 2.23*b* e escrevemos

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm} \qquad L_3 = 400 \text{ mm}$$
$$A_1 = A_2 = 580 \text{ mm}^2 \qquad A_3 = 200 \text{ mm}^2$$

Para encontrarmos as forças internas P_1, P_2 e P_3, devemos cortar cada uma das partes componentes, desenhando para cada corte o diagrama de corpo livre da parte da barra localizada à direita da seção (Fig. 2.23*c*). Impondo a condição de que cada um dos corpos livres está em equilíbrio, obtemos sucessivamente

$$P_1 = 300 \text{ kN} = 300 \times 10^3 \text{ N}$$
$$P_2 = -50 \text{ kN} = -50 \times 10^3 \text{ N}$$
$$P_3 = 150 \text{ kN} = 150 \times 10^3 \text{ N}$$

Usando esses valores na Equação (2.8), temos

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\left[\frac{(300 \times 300)}{580} + \frac{(-50)(300)}{580} + \frac{150 \times 400}{200}\right]$$

$$\delta = \frac{429{,}31}{200} = 2{,}15 \text{ mm}.$$

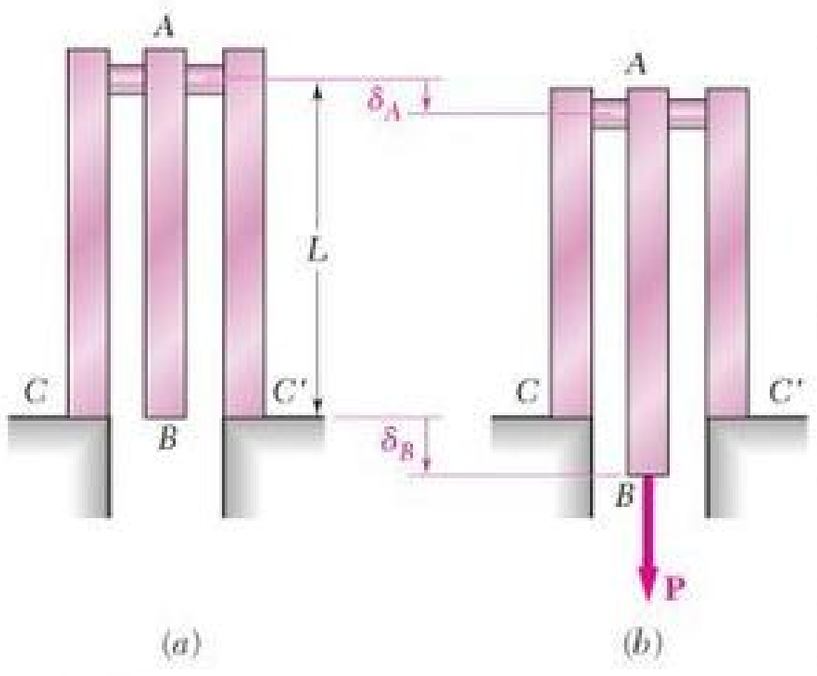


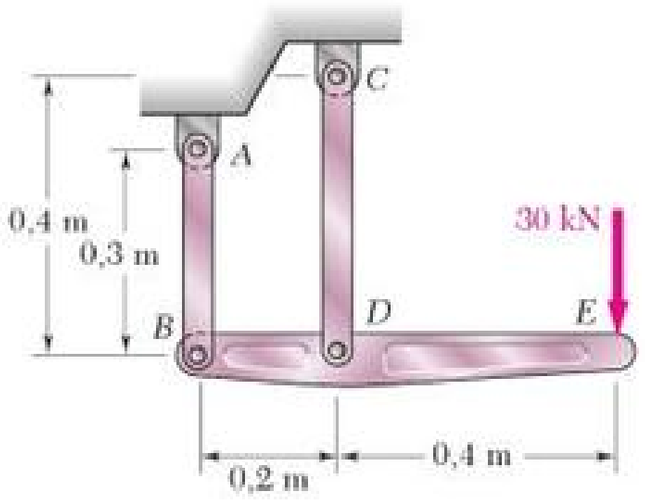
Fig. 2.24

A barra *BC* da Fig. 2.22, utilizada para deduzir a Fórmula (2.7), e a barra *AD* da Fig. 2.23, que acabamos de discutir no Exemplo 2.1, tinham ambas uma extremidade presa a um suporte fixo. Em cada caso, portanto, a deformação δ da barra era igual ao deslocamento de sua extremidade livre. Porém, quando ambas as extremidades da barra se movem, a deformação da barra é medida pelo *deslocamento relativo* de uma extremidade da barra em relação à outra. Considere, por exemplo, o conjunto mostrado na Fig. 2.24*a*, que consiste em três barras elásticas de comprimento L conectadas por um pino rígido em A. Se uma força **P** é aplicada em B (Fig. 2.24*b*), as três barras se deformarão. Como as barras AC e AC' estão presas a suportes fixados em C e C', a deformação de ambas as barras é medida pelo deslocamento δ_A do ponto A. Entretanto, como ambas as extremidades da barra AB se movem, a deformação de AB é medida pela diferença entre os deslocamentos δ_A e δ_B dos pontos A e B, isto é, pelo deslocamento relativo de B em relação a A. Designando esse deslocamento relativo por $\delta_{B/A}$, temos

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \tag{2.10}$$

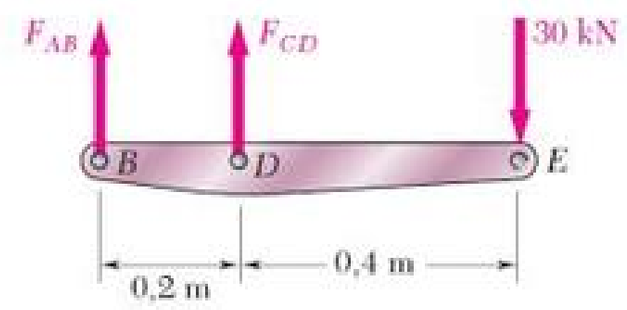
em que A é a área da seção transversal de AB e E é seu módulo de elasticidade.

PROBLEMA RESOLVIDO 2.1



A barra rígida *BDE* é suspensa por duas barras *AB* e *CD*. A barra *AB* é de alumínio ($E = 70$ GPa) e tem uma seção transversal com área de 500 mm^2; a barra *CD* é de aço ($E = 200$ GPa) e tem uma seção transversal com área de 600 mm^2. Para a força de 30 kN mostrada na figura, determine os deslocamentos dos pontos (*a*) *B*, (*b*) *D* e (*c*) *E*.

SOLUÇÃO



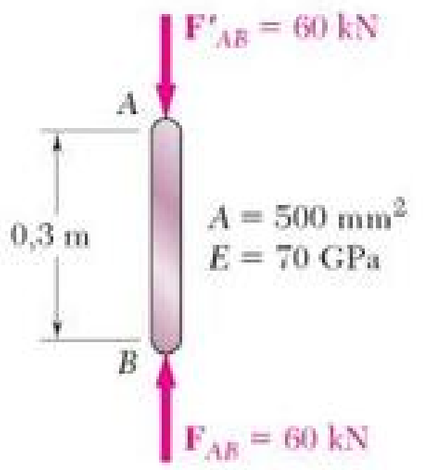
Corpo livre: barra *BDE*

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0{,}6\text{ m}) + F_{CD}(0{,}2\text{ m}) = 0$

$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN}$ *tração*

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0{,}4\text{ m}) - F_{AB}(0{,}2\text{ m}) = 0$

$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN}$ *compressão*

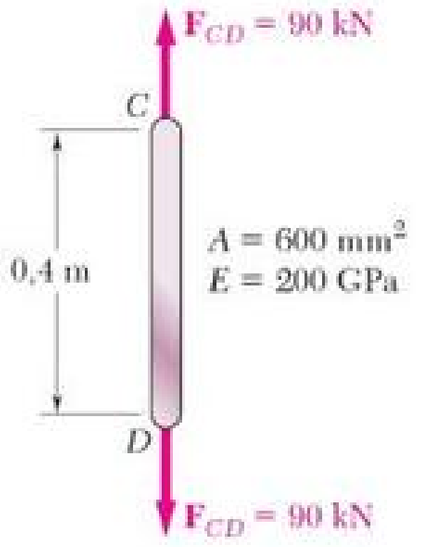


***a*. Deslocamento do ponto *B*.** Como a força interna na barra *AB* é de compressão, temos $P = -60$ kN

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0{,}3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

O sinal negativo indica uma contração do elemento *AB* e, portanto, um deslocamento da extremidade *B* para cima:

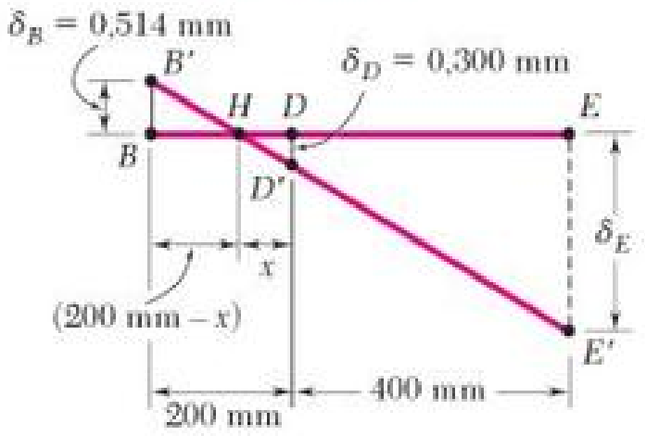
$\delta_B = 0{,}514\text{ mm} \uparrow$ ◀



***b*. Deslocamento do ponto *D*.** Como a força interna na barra *CD* é $P = 90$ kN, temos

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0{,}4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m} \qquad \delta_D = 0{,}300\text{ mm} \downarrow$$ ◀

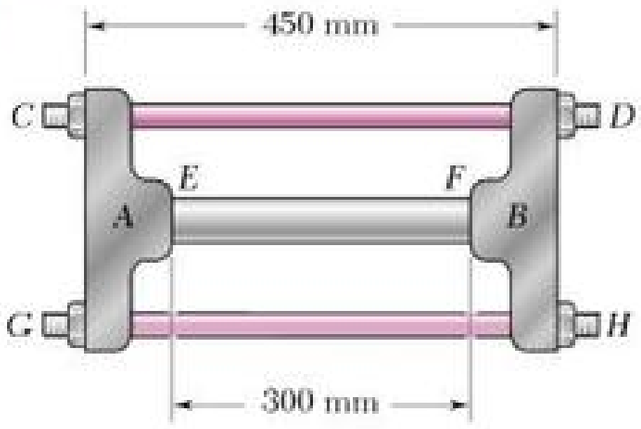


***c*. Deslocamento do ponto *E*.** Designamos por *B'* e *D'* as posições deslocadas dos pontos *B* e *D*. Como a barra *BDE* é rígida, os pontos *B'*, *D'* e *E'* estão em uma linha reta e temos

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0{,}514\text{ mm}}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73{,}7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0{,}300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73{,}7\text{ mm})}{73{,}7\text{ mm}}$$

$\delta_E = 1{,}928\text{ mm} \downarrow$ ◀



PROBLEMA RESOLVIDO 2.2

As peças fundidas rígidas A e B estão conectadas por dois parafusos de aço CD e GH de 19 mm de diâmetro e estão em contato com as extremidades de uma barra de alumínio EF com diâmetro de 38 mm. Cada parafuso tem rosca simples com um passo de 2,5 mm e, depois de serem ajustadas, as porcas em D e H são apertadas em $\frac{1}{4}$ de volta cada uma. Sabendo que E é 200 GPa para o aço e 70 GPa para o alumínio, determine a tensão normal na barra.

SOLUÇÃO

Deformações

***Parafusos* CD *e* GH.** O aperto das porcas provoca tração nos parafusos. Em razão da simetria, ambos estão sujeitos à mesma força interna P_p e sofrem a mesma deformação δ_p. Temos

$$\delta_p = +\frac{P_p L_p}{A_p E_p} = +\frac{P_p(0{,}450\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}019\text{ m})^2(200 \times 10^9\text{ Pa})} = +7{,}936 \times 10^{-9}\,P_p \qquad (1)$$

***Barra* EF.** A barra está em compressão. Designando por P_b a intensidade da força na barra e por δ_b a deformação na barra, temos

$$\delta_b = -\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = -\frac{P_b(0{,}300\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0{,}038\text{ m})^2(70 \times 10^9\text{ Pa})} = +3{,}779 \times 10^{-9}\,P_b \qquad (2)$$

***Deslocamento de* D *em relação a* B.** O aperto de $\frac{1}{4}$ de volta nas porcas faz as extremidades D e H dos parafusos sofrerem um deslocamento de $\frac{1}{4}$ (2,5 mm) *em relação à peça fundida B*. Considerando a extremidade D, temos

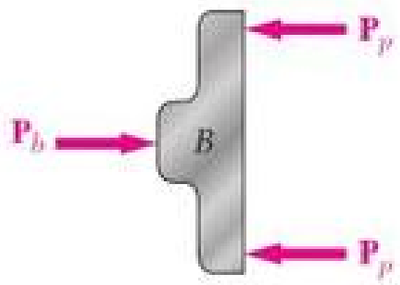
$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0{,}0025\text{ m}) = 6{,}25 \times 10^{-4}\text{ m} \qquad (3)$$

Mas $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, em que δ_D e δ_B representam os deslocamentos de D e B, respectivamente. Considerando que a peça A é mantida em uma posição fixa enquanto as porcas em D e H são apertadas, esses deslocamentos são iguais às deformações dos parafusos e da barra, respectivamente. Temos, então,

$$\delta_{D/B} = \delta_p - \delta_b \qquad (4)$$

Substituindo (1), (2) e (3) em (4), obtemos

$$6{,}25 \times 10^{-4} = 7{,}936 \times 10^{-9}\,P_p + 3{,}779 \times 10^{-9}\,P_b \qquad (5)$$



Corpo livre: peça *B*

$$\stackrel{+}{\rightarrow}\Sigma F = 0: \qquad P_b - 2P_p = 0 \qquad P_b = 2P_p \qquad (6)$$

Forças nos parafusos e na barra. Substituindo o valor de P_b de (6) em (5), temos

$$6{,}25 \times 10^{-4} = 7{,}936 \times 10^{-9}\,P_p + 3{,}779 \times 10^{-9}(2P_p)$$
$$P_p = 40339\text{ N}$$
$$P_b = 2P_p = 2(40339\text{ N}) = 80678\text{ N}$$

Tensão na barra

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_b} = \frac{180678\text{ N}}{\frac{1}{4}\pi(0{,}038\text{ m})^2} \qquad \sigma_b = 71\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.1 Duas marcas de referência são colocadas a exatamente 250 mm uma da outra, em uma barra de alumínio com diâmetro de 12 mm. Sabendo que uma força axial de 6000 N atuando nessa barra provoca um afastamento entre as marcas de 250,18 mm, determine o módulo de elasticidade do alumínio utilizado.

2.2 Uma barra feita de poliestireno de comprimento igual a 304,8 mm e diâmetro igual a 12,7 mm está submetida a uma força de tração igual a 3 558 N. Sabendo que $E = 3{,}10$ GPa, determine (*a*) o alongamento dessa barra e (*b*) a tensão normal na barra.

2.3 Um fio de aço de 60 m de comprimento está submetido a uma força de tração de 6 kN. Sabendo que $E = 200$ GPa e que o comprimento do fio deve aumentar no máximo 48 mm, determine (*a*) o menor diâmetro que pode ser selecionado para o fio e (*b*) a tensão normal correspondente.

2.4 Deseja-se usar um fio de aço de 8,5 m de comprimento e 6,4 mm de diâmetro para sustentar uma força **P** de tração. Sabe-se que o fio se alonga 12 mm quando é aplicada essa força. Sabendo que $E = 200$ GPa, determine (*a*) a intensidade da força **P** e (*b*) a tensão normal correspondente no fio.

2.5 Um tubo de ferro fundido é utilizado para suportar uma força de compressão. Sabendo que $E = 69$ GPa e que a máxima variação admissível no comprimento é 0,025%, determine (*a*) a tensão normal máxima no tubo e (*b*) a espessura mínima da parede para uma carga de 7,2 kN se o diâmetro externo do tubo for de 50 mm.

2.6 Uma barra de controle feita de latão não deve se alongar mais de 3,0 mm quando a tração no fio for 4 kN. Sabendo que $E = 105$ GPa e que a máxima tensão normal admissível é 180 MPa, determine (*a*) o menor diâmetro que pode ser selecionado para a barra e (*b*) o comprimento máximo correspondente da barra.

2.7 Duas marcas de referência são colocadas exatamente a 254 mm uma da outra, em uma barra de alumínio com diâmetro de 12,7 mm, $E = 69{,}6$ GPa e limite de resistência de 110 MPa. Sabendo que a distância entre as marcas de referência é de 254,229 mm depois que a força é aplicada, determine (*a*) a tensão na barra e (*b*) o coeficiente de segurança.

2.8 Um fio com 5 mm de diâmetro e 80 m de comprimento é feito de um aço com módulo de elasticidade $E = 200$ GPa e limite de resistência à tração de 400 MPa. Se o fator de segurança desejado for igual a 3,2, determine (*a*) a máxima tensão admissível no fio e (*b*) o correspondente alongamento desse fio.

2.9 Um bloco de 250 mm de comprimento e seção transversal de 50 × 40 mm deve suportar uma força de compressão centrada **P**. O material a ser utilizado é um bronze para o qual $E = 95$ GPa. Determine a maior força que pode ser aplicada, sabendo que a tensão normal não deve exceder 80 MPa e que a diminuição no comprimento do bloco deverá ser no máximo de 0,12% de seu comprimento original.

2.10 Uma barra de alumínio de 1,5 m de comprimento não deve se alongar mais que 1 mm e a tensão normal não deve exceder 40 MPa quando a barra está submetida a uma força axial de 3 kN. Sabendo que $E = 70$ GPa, determine o diâmetro necessário para a barra.

2.11 Uma barra de controle feita de alumínio alonga-se 2,032 mm quando uma força de tração de 2224 N lhe é aplicada. Sabendo que $\sigma_{adm} = 151{,}7$ MPa e $E = 69{,}6$ GPa, determine o menor diâmetro e o menor comprimento que poderão ser adotados para essa barra.

2.12 Uma barra de alumínio quadrada não deve se alongar mais de 1,4 mm quando submetida a uma força de tração. Sabendo que $E = 70$ GPa e que a resistência à tração admissível é 120 MPa, determine (*a*) o comprimento máximo admissível para a barra e (*b*) as dimensões necessárias para a seção transversal se a força de tração for de 28 kN.

2.13 A barra *BD* feita de aço ($E = 200$ GPa) é utilizada para contenção lateral da haste comprimida *ABC*. O máximo esforço que se desenvolve em *BD* é igual a $0{,}02P$. Se a tensão não deve exceder 124,1 MPa e a máxima mudança de comprimento da barra *BD* não pode exceder 0,001 vez o comprimento de *ABC*, determine o menor diâmetro possível de ser utilizado para o membro *BD*.

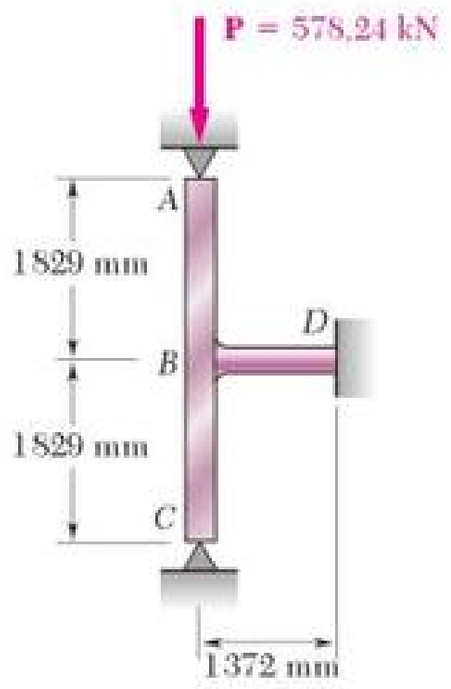


Fig. P2.13

2.14 O cabo *BC* de 4 mm de diâmetro é feito de um aço com $E = 200$ GPa. Sabendo que a máxima tensão no cabo não pode exceder 190 MPa e que a deformação do cabo não deve exceder 6 mm, determine a máxima força **P** que pode ser aplicada conforme mostra a figura.

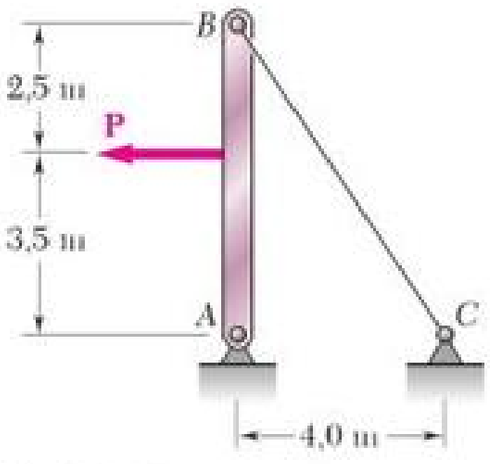


Fig. P2.14

2.15 Um cilindro vazado de poliestireno ($E = 3{,}1$ GPa) com parede de 3,2 mm de espessura e uma placa rígida circular (somente parte dela é mostrada) são utilizados para suportar uma barra de aço *AB* ($E = 200$ GPa) de 254 mm de comprimento e 6,4 mm de diâmetro. Se uma carga **P** de 3 558 N for aplicada em *B*, determine (*a*) a deformação da barra *AB*, (*b*) o deslocamento do ponto *B* e (*c*) a tensão normal média na barra *AB*.

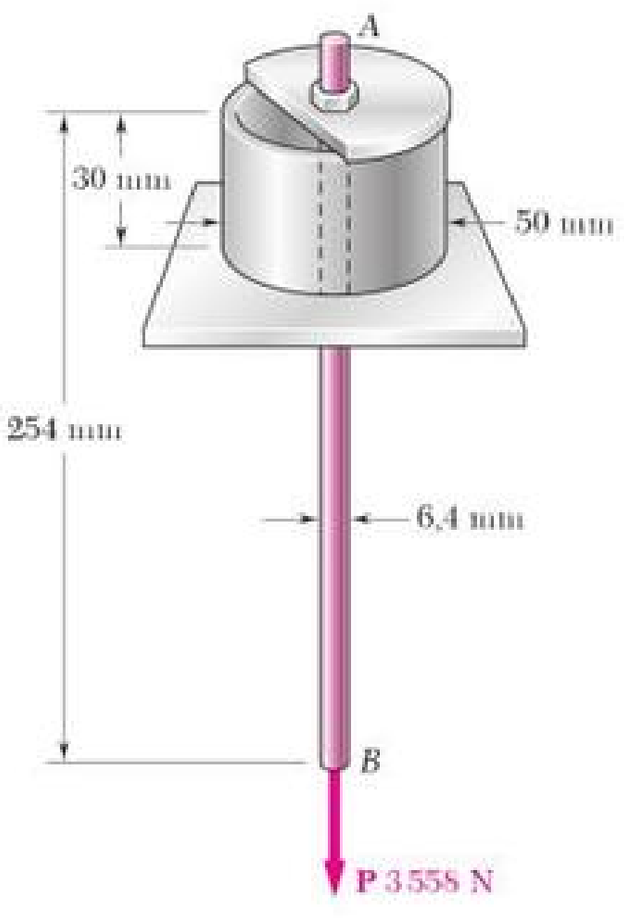


Fig. P2.15

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

2.26 Cada uma das hastes AB e CD é feita de aço (200 GPa) e seção transversal retangular e uniforme de 6,35 × 25,4 mm. Determine a maior carga que pode ser suportada pelo ponto E se seu deslocamento não pode exceder 0,254 mm.

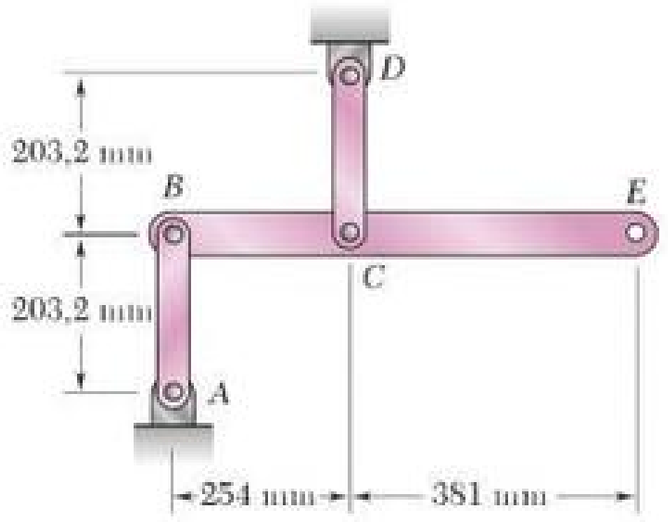


Fig. *P2.26*

2.27 Cada uma das barras AB e CD é feita de alumínio (E = 75 GPa) e tem uma seção transversal com área de 125 mm^2. Sabendo que elas suportam a barra rígida BC, determine o deslocamento do ponto E.

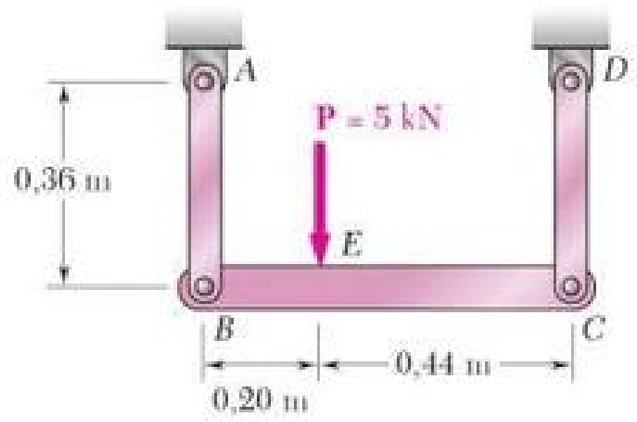


Fig. P2.27

2.28 O comprimento do fio de aço CD de 2 mm de diâmetro foi ajustado de modo que, sem nenhuma força aplicada, existe um espaço de 1,5 mm entre a extremidade B da barra rígida ACB e um ponto de contato E. Sabendo que E = 200 GPa, determine onde deve ser colocado o bloco de 20 kg na barra rígida para provocar o contato entre B e E.

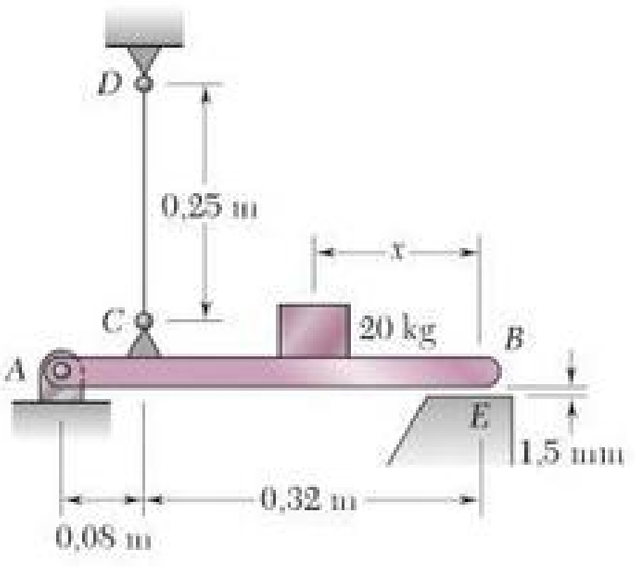


Fig. P2.28

2.29 Um cabo homogêneo de comprimento L e seção transversal uniforme é suspenso por uma das extremidades. (*a*) Designando por ρ a densidade (massa por unidade de volume) do cabo e por E seu módulo de elasticidade, determine a deformação do cabo em razão de seu próprio peso. (*b*) Mostre que a mesma deformação seria obtida se o cabo estivesse na horizontal e se uma força igual à metade de seu peso fosse aplicada a cada extremidade.

2.30 Uma carga vertical P é aplicada no centro A da face superior de um tronco de cone circular de altura h e com raio mínimo igual a a e raio máximo igual a b. Denotando por E o módulo de elasticidade do material e desprezando o efeito do peso próprio, determine a deflexão do ponto A.

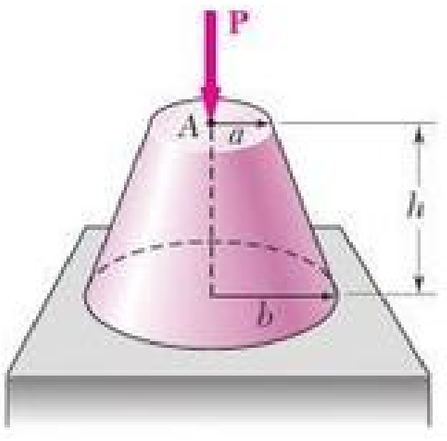


Fig. P2.30

2.31 Designando por ϵ a "deformação específica de engenharia" em um corpo de prova em tração, mostre que a deformação específica verdadeira é $\epsilon_v = \ln(1 + \epsilon)$.

2.32 O volume de um corpo de prova em tração é essencialmente constante enquanto ocorre a deformação plástica. Se o diâmetro inicial do corpo de prova for d_1, mostre que, quando o diâmetro for d, a deformação específica verdadeira será $\epsilon_v = 2 \ln(d_1/d)$.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Substituindo esses valores na Equação (2.8), obtemos

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = -\frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{E} \tag{2.18}$$

Considerando que a deformação total δ da barra deve ser zero, escrevemos

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \tag{2.19}$$

e substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.19),

$$\delta = \frac{1{,}125 \times 10^9}{E} - \frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

Dessa equação temos o valor de R_B

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

A reação R_A no apoio superior é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32). Escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

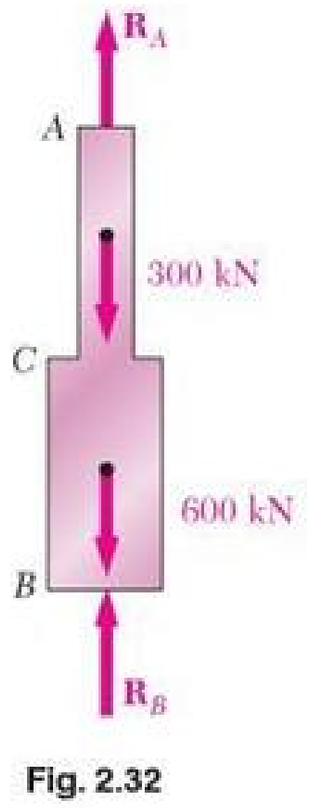


Fig. 2.32

Uma vez determinadas as reações, as tensões e deformações na barra podem ser obtidas facilmente. Deve-se notar que, embora a deformação total da barra seja zero, cada uma de suas partes componentes *se deforma* sob as condições de carregamento e restrições nos apoios.

EXEMPLO 2.5

Determine as reações em A e B para a barra de aço do Exemplo 2.4. Considere o mesmo carregamento e suponha, agora, que exista uma folga de 4,5 mm entre a barra e o apoio B antes de aplicar o carregamento (Fig. 2.33). Suponha $E = 200$ GPa.

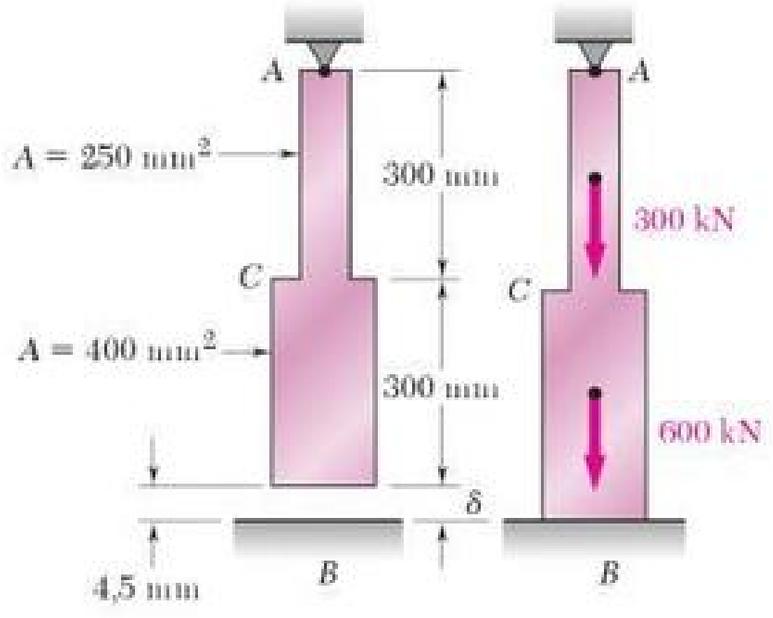


Fig. 2.33

Seguimos o mesmo procedimento do Exemplo 2.4. Considerando a reação em B redundante, calculamos as deformações δ_L e δ_R provocadas, respectivamente, pelas forças e pela reação redundante $\mathbf{R}_B$. No entanto, neste caso a deformação total não é zero, mas $\delta = 4{,}5$ mm. Escrevemos então

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4{,}5 \times 10^{-3} \text{ m} \tag{2.20}$$

Substituindo δ_L e δ_R de (2.17) e (2.18) em (2.20) e lembrando de que $E = 200$ GPa $= 200 \times 10^9$ Pa, temos

$$\delta = \frac{1{,}125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1{,}95 \times 10^3) R_B}{200 \times 10^9} = 4{,}5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Resolvendo esta equação, determina-se o valor de R_B. Assim, temos

$$R_B = 115{,}4 \times 10^3 \text{ N} = 115{,}4 \text{ kN}$$

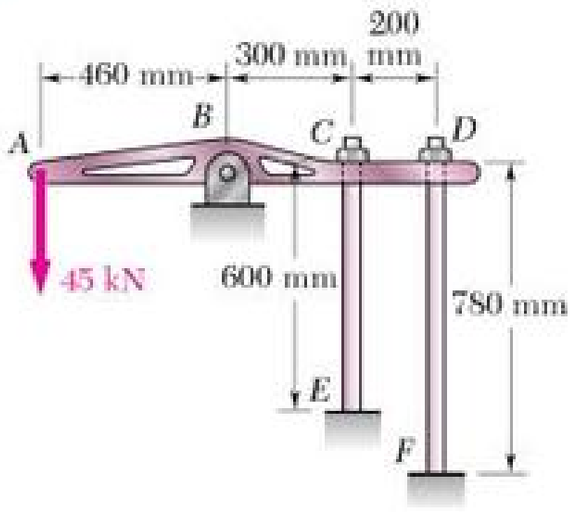
A reação em A é obtida do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 2.32)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115{,}4 \text{ kN} = 785 \text{ kN}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

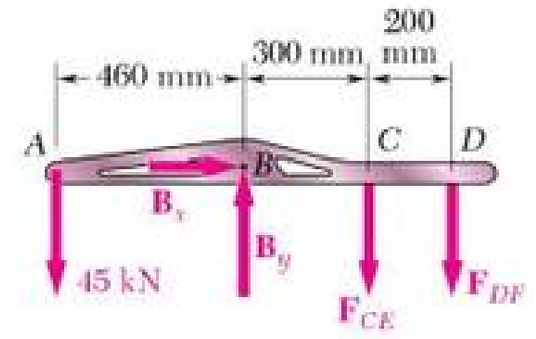


PROBLEMA RESOLVIDO 2.3

As barras CE de 12 mm de diâmetro e DF de 20 mm de diâmetro estão ligadas à barra rígida $ABCD$ conforme mostra a figura. Sabendo que as barras são feitas de alumínio e usando $E = 70$ GPa, determine (a) a força em cada barra provocada pela força mostrada na figura e (b) o deslocamento correspondente do ponto A.

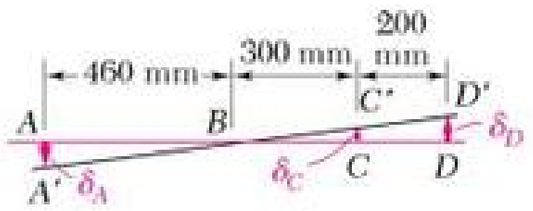
SOLUÇÃO

Estática. Considerando o diagrama de corpo livre da barra $ABCD$, notamos que a reação em B e as forças aplicadas pelas barras são indeterminadas. No entanto, usando a estática, podemos escrever



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (45\text{ kN})(460\text{ mm}) - F_{CE}(300\text{ mm}) - F_{DF}(500\text{ mm}) = 0$$
$$3F_{CE} + 5F_{DF} = 207 \tag{1}$$

Geometria. Após a aplicação da força de 45 kN, a posição da barra é $A'BC'D'$. Com base nos triângulos semelhantes BAA', BCC', e BDD', temos

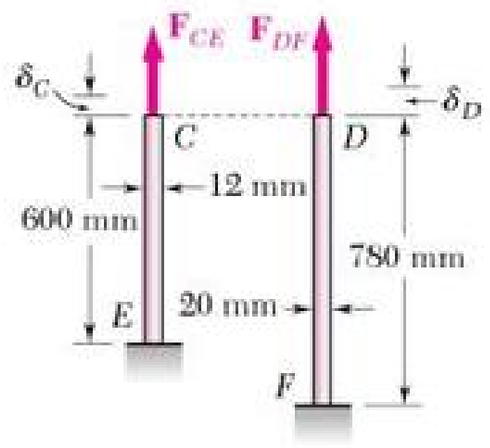


$$\frac{\delta_C}{300\text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500\text{ mm}} \qquad \delta_C = 0{,}60\,\delta_D \tag{2}$$

$$\frac{\delta_A}{460\text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500\text{ mm}} \qquad \delta_A = 0{,}92\,\delta_D \tag{3}$$

Deformações. Usando a Equação (2.7), temos

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$



Substituindo os valores de δ_C e δ_D em (2), escrevemos

$$\delta_C = 0{,}6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0{,}6\,\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0{,}6\,\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0{,}6\left(\frac{780\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(12\text{ mm})^2}{\frac{1}{4}\pi(20\text{ mm})^2}\right]F_{DF} \qquad F_{CE} = 0{,}281F_{DF}$$

Força em cada barra. Substituindo F_{CE} em (1) e lembrando que todas as forças foram expressas em kN, temos

$$3(0{,}281\,F_{DF}) + 5F_{DF} = 207 \qquad F_{DF} = 35{,}43\text{ kN} \blacktriangleleft$$
$$F_{CE} = 0{,}281\,F_{DF} = 0{,}281(35{,}43) \qquad F_{CE} = 9{,}96\text{ kN} \blacktriangleleft$$

Deslocamentos. O deslocamento do ponto D é

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(35{,}43\text{ kN})(780\text{ mm})}{\frac{1}{4}\pi(20\text{ mm})^2(70\text{ kN/mm}^2)} \qquad \delta_D = 1{,}26\text{ mm}$$

Usando (3), escrevemos

$$\delta_A = 0{,}92\delta_D = 0{,}92(1{,}26\text{ mm}) \qquad \delta_A = 1{,}16\text{ mm} \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

2.44 Resolva o Problema 2.43 supondo que, depois de as forças terem sido aplicadas, o torno de bancada seja ajustado para aumentar a distância entre suas mandíbulas em 0,1 mm.

2.45 As barras de aço *BC* e *DE* ($E = 200$ GPa) tem 12,7 mm de largura e 6,35 mm de espessura. Determine (*a*) a força atuante em cada vínculo quando uma carga **P** de 2669 N é aplicada à barra rígida *AF* como mostrada e (*b*) o correspondente deslocamento do ponto A.

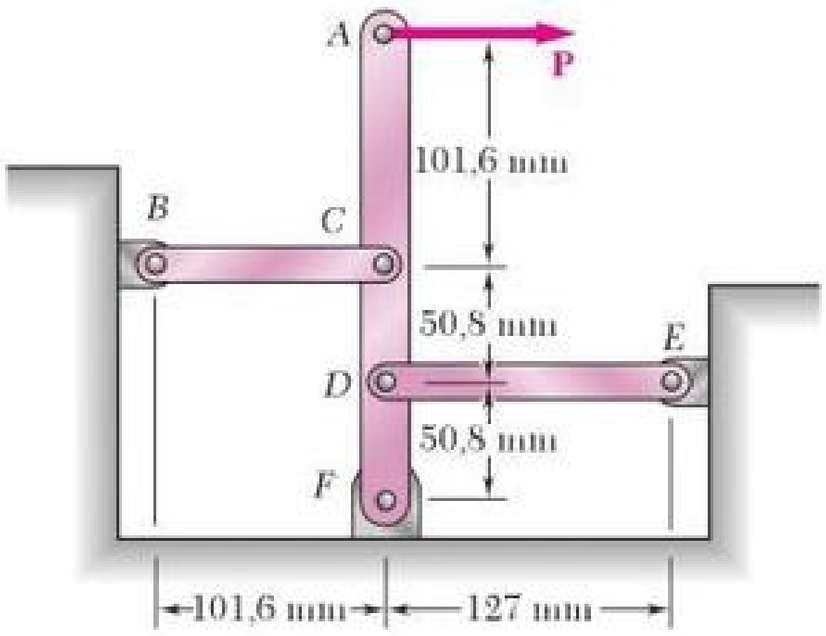


Fig. *P2.45*

2.46 A barra rígida *ABCD* é suportada por quatro fios idênticos. Determine a tensão em cada fio causada pela carga **P** mostrada.

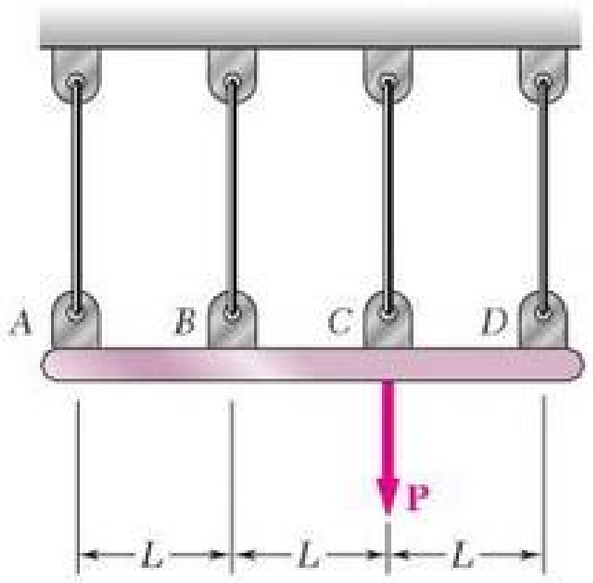


Fig. P2.46

2.47 O tubo de alumínio é completamente unido ao núcleo de latão e a montagem tem as tensões aliviadas a uma temperatura de 15 °C. Considerando apenas deformações axiais, determine a tensão no alumínio quando a temperatura alcançar os 195 °C.

2.48 Resolva o Problema 2.47, supondo que o núcleo é feito de aço ($E = 200$ GPa, $\alpha = 11,7 \times 10^{-6}$/°C) em substituição ao latão.

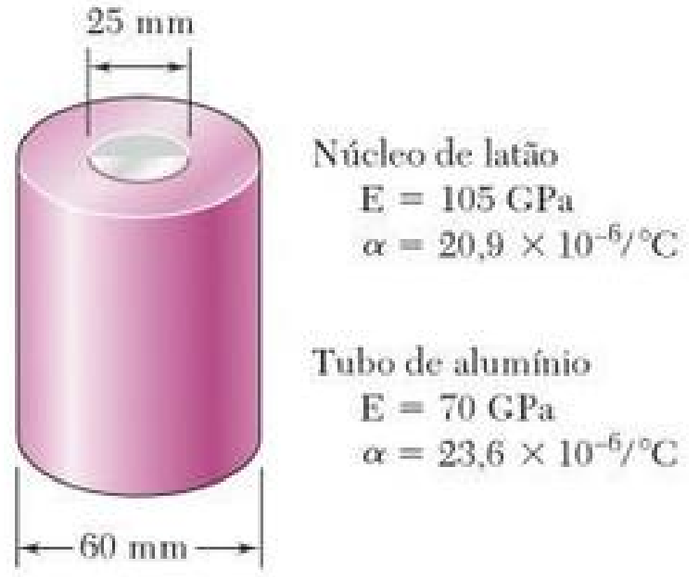


Fig. P2.47

2.49 Uma coluna de concreto de 1219 mm de altura é reforçada por quatro barras de aço, cada uma com diâmetro de 19,05 mm. Sabendo que $E_{aço} = 200$ GPa, $\alpha_{aço} = 11,7 \times 10^{-6}$/°C e $E_{conc} = 24,8$ GPa e $\alpha_{conc} = 9,9 \times 10^{-6}$/°C, determine as tensões normais induzidas no aço e no concreto por um aumento de temperatura de 30 °C.

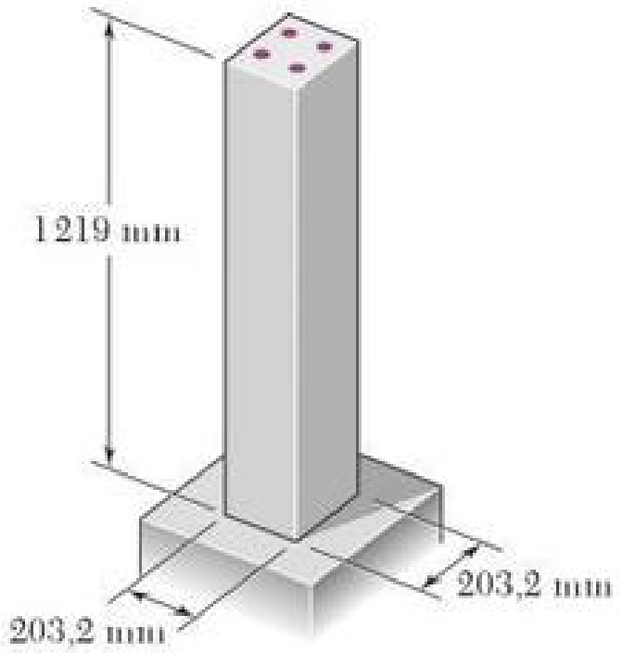


Fig. *P2.49*

2.50 Um tubo de latão ($\alpha_{latão} = 20,9 \times 10^{-6}$/°C) é totalmente preso ao núcleo de aço ($\alpha_{aço} = 11,7 \times 10^{-6}$/°C). Determine o maior aumento permitido na temperatura considerando que a tensão no núcleo de aço não deve exceder 55 MPa.

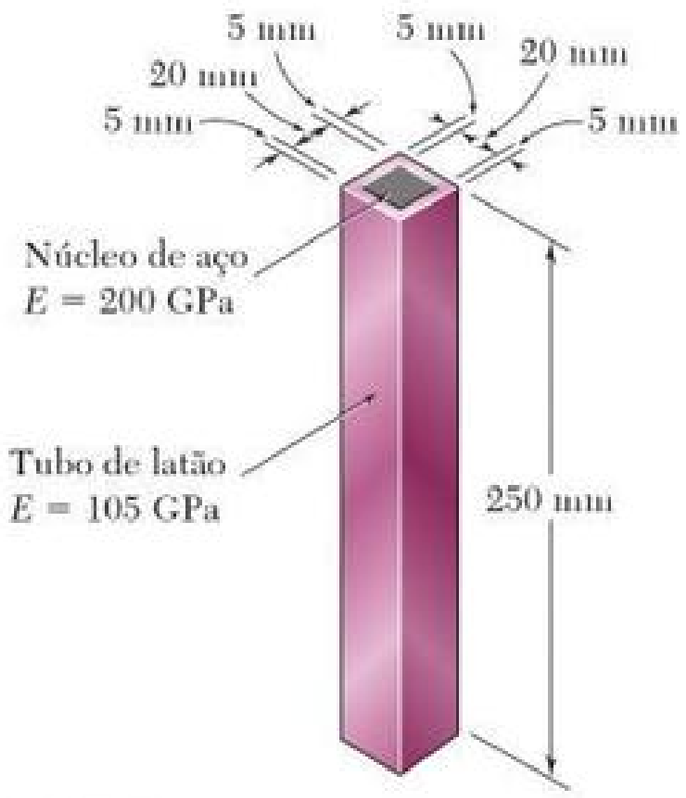


Fig. P2.50

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 2.7

Observa-se que uma barra de 500 mm de comprimento e 16 mm de diâmetro, feita de um material homogêneo e isotrópico, aumenta no comprimento em 300 μm, e diminui no diâmetro em 2,4 μm quando submetida a uma força axial de 12 kN. Determine o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

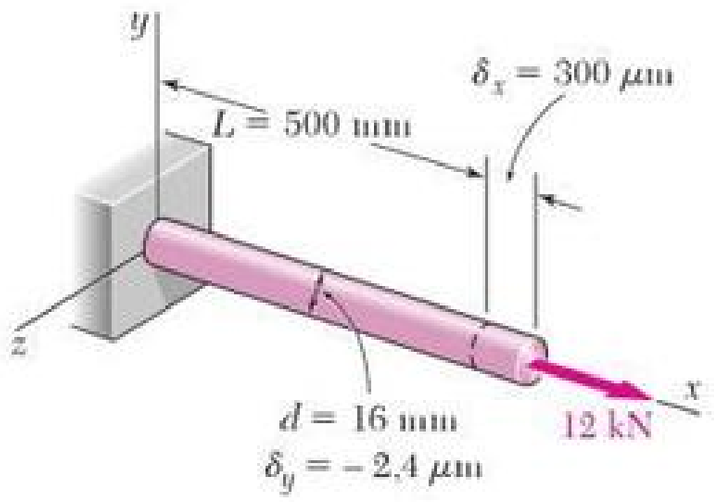


Fig. 2.41

A área da seção transversal da barra é

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

Escolhendo o eixo x ao longo do eixo da barra (Fig. 2.41), escrevemos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\text{N}}{201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 59{,}7\,\text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\ \mu\text{m}}{500\ \text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2{,}4\ \mu\text{m}}{16\ \text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

Da lei de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, obtemos

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59{,}7\,\text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99{,}5\,\text{GPa}$$

e, da Equação (2.26),

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0{,}25$$

2.12. Carregamento multiaxial; lei de Hooke generalizada

Todos os exemplos considerados até agora tratavam de elementos delgados submetidos a forças axiais, isto é, a forças com direção de um único eixo. Escolhemos esse eixo como o eixo x, designamos por P a força interna em uma dada localização e as componentes de tensão correspondentes eram $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$, e $\sigma_z = 0$.

Vamos agora considerar elementos estruturais submetidos a cargas que atuam nas direções dos três eixos coordenados e produzem tensões normais σ_x, σ_y e σ_z que são todas diferentes de zero (Fig. 2.42). Essa condição é conhecida como *carregamento multiaxial*. Note que essa não é a condição geral de tensão descrita na Seção 1.12, visto que não há tensões de cisalhamento incluídas entre as tensões mostradas na Fig. 2.42.

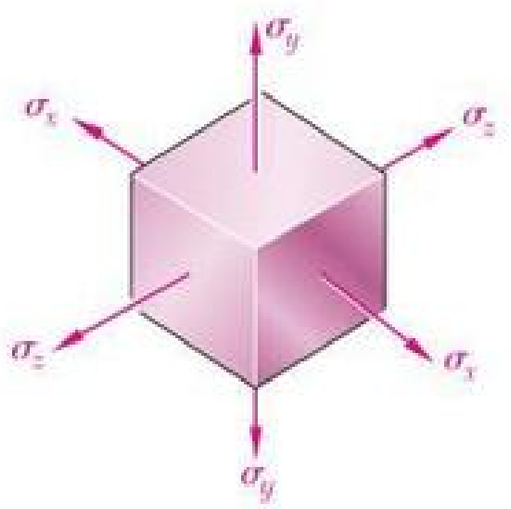


Fig. 2.42

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

O fato de que as deformações de cisalhamento, bem como as deformações específicas normais, resultam de um carregamento axial não deve ser uma surpresa para nós, pois já observamos no fim da Seção 1.12 que uma carga axial **P** provoca tensões normais e de cisalhamento de igual intensidade nas quatro faces de um elemento orientado a 45° do eixo do elemento. Isso foi ilustrado na Fig. 1.40 que, por conveniência, foi repetida aqui. Foi mostrado também na Seção 1.11 que a tensão de cisalhamento é máxima em um plano que forma um ângulo de 45° com o eixo da força. Conclui-se da lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento que a deformação de cisalhamento γ' associada ao elemento da Fig. 2.53*b* também é máxima: $\gamma' = \gamma_m$.

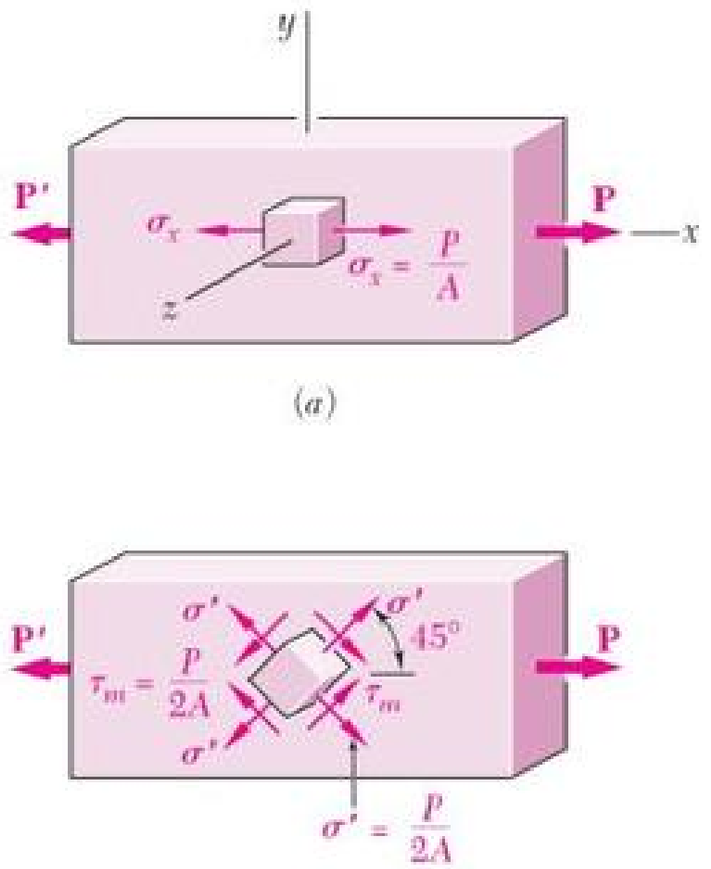


Fig. 1.40 (repetida)

Embora um estudo mais detalhado das transformações de deformações específica seja apresentado só no Capítulo 7, nesta seção deduziremos uma relação entre a deformação de cisalhamento máxima $\gamma' = \gamma_m$ associada ao elemento da Fig. 2.53*b* e a deformação específica normal ϵ_x na direção da força. Vamos considerar para essa finalidade o elemento prismático obtido pelo corte do elemento em forma de cubo da Fig. 2.53*a* por um plano diagonal (Fig. 2.54*a* e *b*). Referindo-nos à Fig. 2.53*a*, concluímos que esse novo elemento se deformará, transformando-se no elemento mostrado na Fig. 2.54*c*, que tem lados horizontais e verticais, respectivamente, iguais a $1 + \epsilon_x$ e $1 - \nu\epsilon_x$. Mas o ângulo formado pelas faces oblíqua e horizontal do elemento da Fig. 2.54*b* é precisamente metade de um dos ângulos retos do elemento em

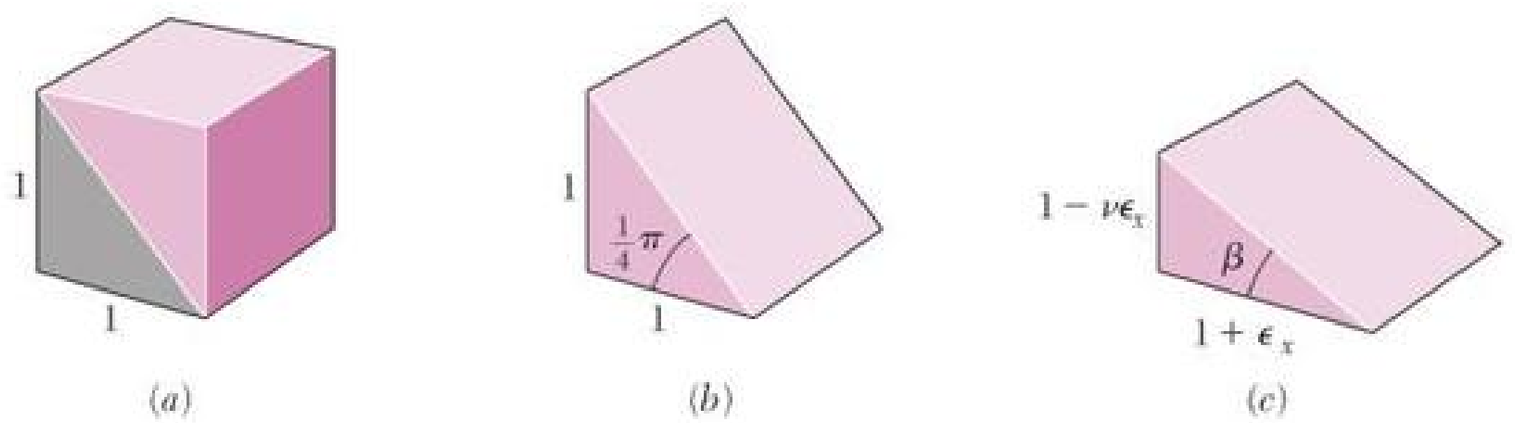


Fig. 2.54

forma de cubo considerado na Fig. 2.53*b*. O ângulo β, obtido após a deformação, deve, portanto, ser igual à metade de $\pi/2 - \gamma_m$. Escrevemos

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

Aplicando a fórmula para a tangente da diferença de dois ângulos, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\gamma_m}{2}}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 2.11

Um cubo de 60 mm é feito de camadas de grafite epóxi com fibras alinhadas na direção x. 0 cubo está submetido a uma força de compressão de 140 kN na direção x. As propriedades do material compósito são: $E_x = 155{,}0$ GPa, $E_y = 12{,}10$ GPa, $E_z = 12{,}10$ GPa, $\nu_{xy} = 0{,}248$, $\nu_{xz} = 0{,}248$ e $\nu_{yz} = 0{,}458$. Determine as variações nas dimensões do cubo, sabendo que (*a*) o cubo está livre para se deformar nas direções y e z (Fig. 2.56) e (*b*) o cubo está livre para se deformar na direção z, mas está impedido de se deformar na direção y por duas placas sem atrito (Fig. 2.57).

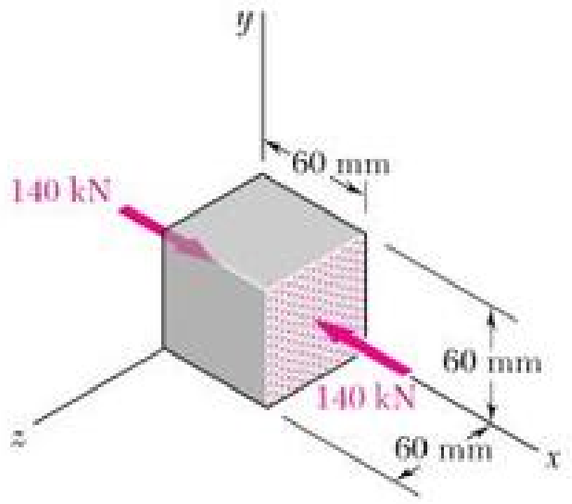


Fig. 2.56

(a) Livre nas direções y e z. Primeiro determinamos a tensão σ_x na direção da força. Temos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0{,}060 \text{ m})(0{,}060 \text{ m})} = -38{,}89 \text{ MPa}$$

Como o cubo não está sob carga ou impedido de se deformar nas direções y e z, temos $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Assim, os membros do lado direito das Equações (2.45) se reduzem aos seus primeiros termos. Substituindo os dados fornecidos nessas equações, temos

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38{,}89 \text{ MPa}}{155{,}0 \text{ GPa}} = -250{,}9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} = +62{,}22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}69 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} = +62{,}22 \times 10^{-6}$$

As variações nas dimensões do cubo são obtidas multiplicando-se as deformações específicas correspondentes pelo comprimento $L = 0{,}060$ m do lado do cubo

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250{,}9 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = -15{,}05 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62{,}2 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +3{,}73 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62{,}2 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +3{,}73 \ \mu\text{m}$$

(b) Livre na direção z, impedido de se deformar na direção y. A tensão na direção x é a mesma da parte *a*, ou seja, $\sigma_x = -38{,}89$ MPa. Como o cubo está livre para se deformar na direção z e na parte *a*, temos novamente $\sigma_z = 0$. Mas como o cubo agora está impedido de se deformar na direção y, devemos esperar uma tensão σ_y diferente de zero. Por outro lado, visto que o cubo não pode se deformar na direção y, devemos ter $\delta_y = 0$ e, portanto, $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$. Fazendo $\sigma_z = 0$ e $\epsilon_y = 0$ na segunda das Equações (2.45), determina-se o valor de σ_y. Assim, temos

$$\sigma_y = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x = \left(\frac{12{,}10}{155{,}0}\right)(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa}) = -752{,}9 \text{ kPa}$$

Agora que as três componentes de tensão foram determinadas, podemos usar a primeira e a última das Equações (2.45) para calcular as componentes de deformação específicas ϵ_x e ϵ_z. Mas a primeira dessas equações contém o coeficiente de Poisson ν_{yx}, e,

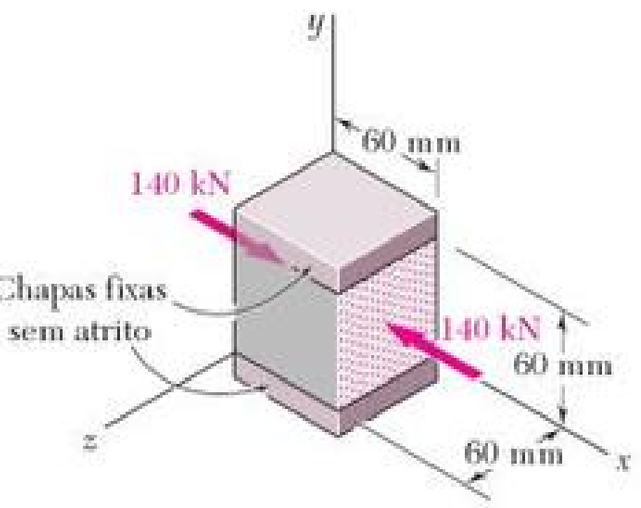


Fig. 2.57

como vimos anteriormente, esse coeficiente *não é igual* ao coeficiente ν_{xy} que estava entre os dados fornecidos. Para encontrarmos ν_{yx}, usamos a primeira das Equações (2.46) e escrevemos

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12{,}10}{155{,}0}\right)(0{,}248) = 0{,}01936$$

Fazendo $\sigma_z = 0$ na primeira e na terceira das Equações (2.45) e substituindo nessas equações os valores numéricos fornecidos de E_x, E_y, ν_{xz} e ν_{yz}, bem como os valores numéricos obtidos para σ_x, σ_y, e ν_{yx}, temos

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38{,}89 \text{ MPa}}{155{,}0 \text{ GPa}} - \frac{(0{,}01936)(-752{,}9 \text{ kPa})}{12{,}10 \text{ GPa}} = -249{,}7 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0{,}248)(-38{,}89 \text{ MPa})}{155{,}0 \text{ GPa}} - \frac{(0{,}458)(-752{,}9 \text{ kPa})}{12{,}10 \text{ GPa}} = +90{,}72 \times 10^{-6}$$

As variações nas dimensões do cubo são obtidas multiplicando-se as deformações correspondentes pelo comprimento $L = 0{,}060$ m do lado do cubo

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249{,}7 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = -14{,}98 \ \mu\text{m}$$
$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0{,}060 \text{ m}) = 0$$
$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90{,}72 \times 10^{-6})(0{,}060 \text{ m}) = +5{,}44 \ \mu\text{m}$$

Comparando os resultados das partes *a* e *b*, notamos que a diferença entre os valores obtidos para a deformação δ_x na direção das fibras é desprezível. No entanto, a diferença entre os valores obtidos para a deformação lateral δ_z não é desprezível. Essa deformação é claramente maior quando o cubo está impedido de se deformar na direção y.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

2.71 A placa homogênea *ABCD* está submetida a um carregamento biaxial como mostra a figura. Sabe-se que $\sigma_z = \sigma_0$ e que a variação no comprimento da placa na direção x deve ser zero, ou seja, $\epsilon_x = 0$. Designando por E o módulo de elasticidade e por ν o coeficiente de Poisson, determine (*a*) a intensidade necessária de σ_x e (*b*) a relação σ_0/ϵ_z.

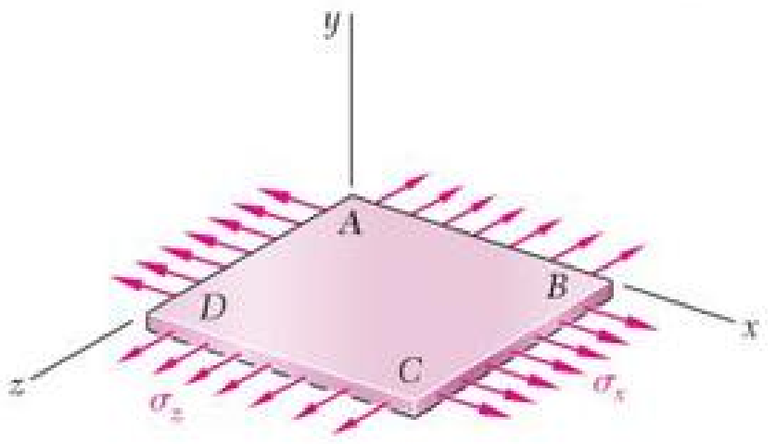


Fig. *P2.71*

2.72 Para um componente sob carregamento axial, expresse a deformação específica normal ϵ' na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo da força em função da deformação específica axial ϵ_x através de (*a*) comparação das hipotenusas dos triângulos mostrados na Fig. 2.54, que representam respectivamente um elemento antes e depois da deformação e (*b*) usando os valores das tensões σ' e σ_x correspondentes mostrados na Fig. 1.40 e a lei de Hooke generalizada.

2.73 Em muitas situações sabe-se que a tensão normal em determinada direção é zero, como, $\sigma_z = 0$, no caso da placa fina mostrada. Para esse caso, conhecido como *estado plano de tensão*, mostre que, se as deformações ϵ_x e ϵ_y foram determinadas experimentalmente, podemos expressar σ_x, σ_y e ϵ_z da seguinte maneira:

$$\sigma_x = E\frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E\frac{\epsilon_y + \nu\epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

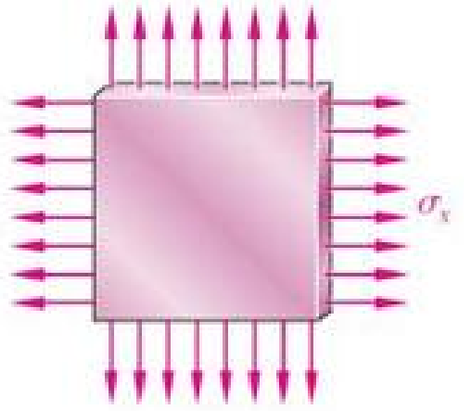


Fig. P2.73

2.74 Em muitas situações físicas, impedimentos de deformação devem ocorrer em determinada direção, por exemplo $\epsilon_z = 0$ no caso mostrado. Esse impedimento ocorre por causa da longa dimensão da barra na direção z. Seções planas perpendiculares ao eixo longitudinal permanecem planas e separadas à mesma distância. Mostre que, para essa situação, conhecida como *estado plano de deformação*, podemos expressar σ_z, ϵ_x e ϵ_y da seguinte maneira:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

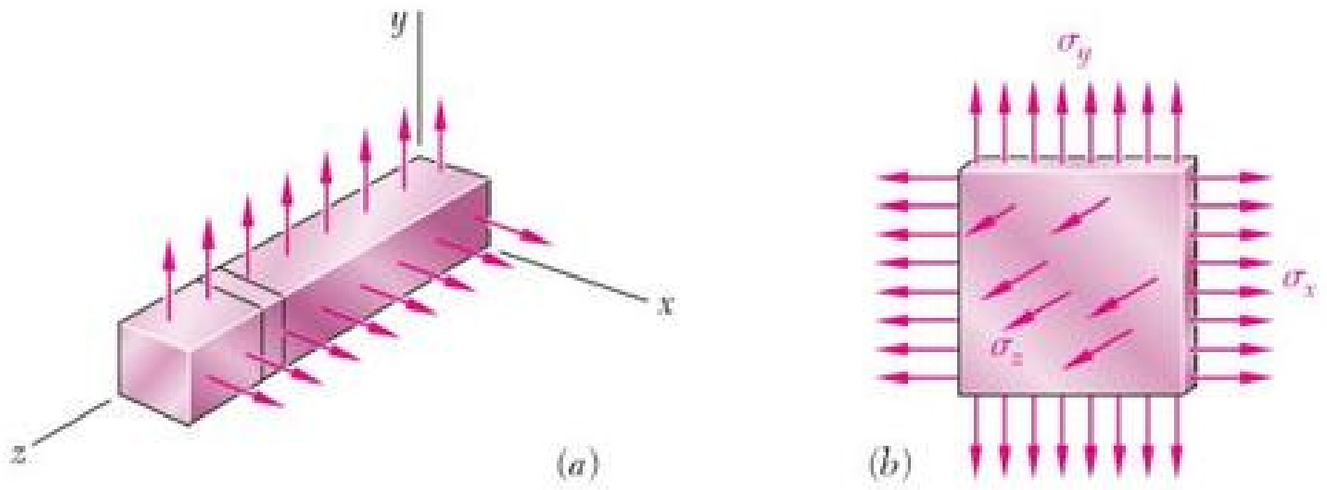


Fig. P2.74

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

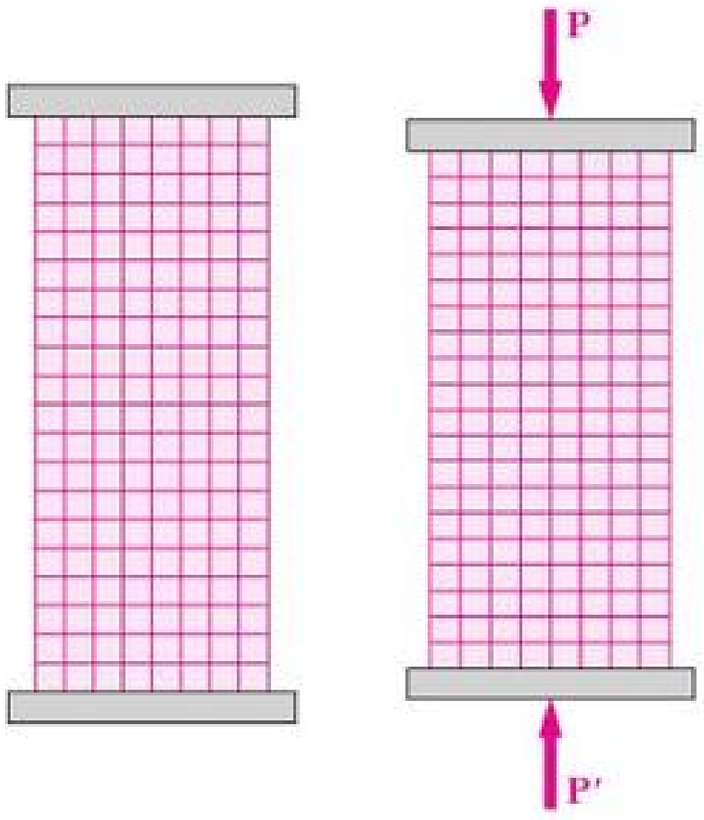


Fig. 2.59

que as seções planas permanecerão planas, e que todos os elementos se deformarão da mesma maneira, visto que essa suposição é claramente compatível com as condições de contorno do elemento. Isso está ilustrado na Fig. 2.59, que mostra um modelo de borracha antes e depois do carregamento.‡ Agora, se os elementos se deformam da mesma maneira, a distribuição de deformações específica através do componente deve ser uniforme. Em outras palavras, a deformação específica axial ϵ_y e a deformação específica lateral $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$ são constantes. Mas se as tensões não excederem o limite de proporcionalidade, podemos aplicar a lei de Hooke e escrever $\sigma_y = E\epsilon_y$, e consequentemente a tensão normal σ_y também será constante. Assim, a distribuição das tensões é uniforme através de todo o componente e, em qualquer ponto,

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{\text{méd}} = \frac{P}{A}$$

Entretanto, se as forças forem concentradas, conforme ilustra a Fig. 2.60, os elementos nas vizinhanças imediatas dos pontos de aplicação das forças estarão submetidos a tensões muito grandes, ao passo que outros elementos próximos das extremidades do componente não serão afetados pelo carregamento. Isso pode ser verificado observando-se que ocorrem grandes deformações e, portanto, grandes deformações específicas e grandes tensões nas proximidades dos pontos de aplicação das forças, enquanto nos cantos não há deformações. No entanto, à medida que consideramos elementos cada vez mais distantes das extremidades, notamos uma equalização progressiva das deformações envolvidas e, portanto, uma distribuição mais uniforme das deformações específicas e tensões através da seção transversal do componente. Isso está melhor ilustrado na Fig. 2.61, que mostra o resultado dos cálculos, por métodos de matemática avançada, da distribuição de tensões através de várias seções transversais de uma placa retangular fina submetida a forças

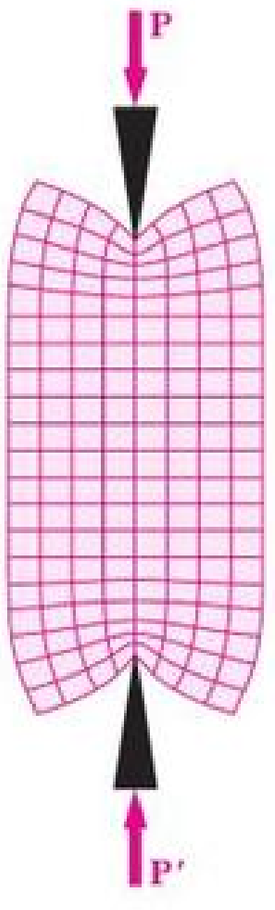


Fig. 2.60

‡ Note que, para componentes longos e delgados, é possível uma outra configuração, e certamente prevalecerá, se a carga for suficientemente grande; o componente *se dobra* e assume uma forma curvada. Isso será discutido no Capítulo 10.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

2.19. Deformações plásticas

Os resultados obtidos nas seções anteriores eram baseados na suposição de uma relação tensão-deformação linear. Em outras palavras, considerou-se que o limite de proporcionalidade do material nunca havia sido ultrapassado. Essa é uma suposição razoável no caso de materiais frágeis, que entram em ruptura sem escoarem. Porém, no caso dos materiais dúcteis, essa suposição pressupõe que a tensão de escoamento do material não é excedida. As deformações permanecerão, assim, dentro da região elástica e os componentes estruturais considerados permanecerão em sua forma original após a remoção das forças. Se, entretanto, as tensões em qualquer parte do elemento excederem a tensão de escoamento do material, ocorrerão deformações plásticas, e a maior parte dos resultados obtidos nas seções anteriores deixará de ser válida. Deve ser feita então uma análise mais profunda, com base em uma relação tensão-deformação não-linear.

Embora uma análise levando em conta a relação real tensão-deformação esteja além do escopo deste livro, podemos obter muitas informações sobre o comportamento plástico considerando um *material elastoplástico* ideal. Para esse material considera-se o diagrama tensão-deformação constituído de dois segmentos retos, como mostra a Fig. 2.65. Podemos notar que o diagrama tensão-deformação para o aço doce nas regiões elástica e plástica é similar a esse modelo ideal. Desde que a tensão σ seja menor que a tensão de escoamento σ_E, o material tem comportamento elástico e obedece à lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Quando σ atinge o valor σ_E, o material começa a escoar e continua deformando plasticamente sob um carregamento constante. Se o carregamento é removido, o descarregamento ocorre ao longo do segmento de reta CD paralelo à parte inicial AE da curva de carregamento. O segmento AD do eixo horizontal representa a deformação específica correspondente à deformação permanente ou deformação plástica resultante do carregamento e descarregamento do corpo de prova. Embora nenhum material real se comporte exatamente como mostra a Fig. 2.65, esse diagrama tensão-deformação será útil na discussão de deformações plásticas de materiais dúcteis como o aço doce.

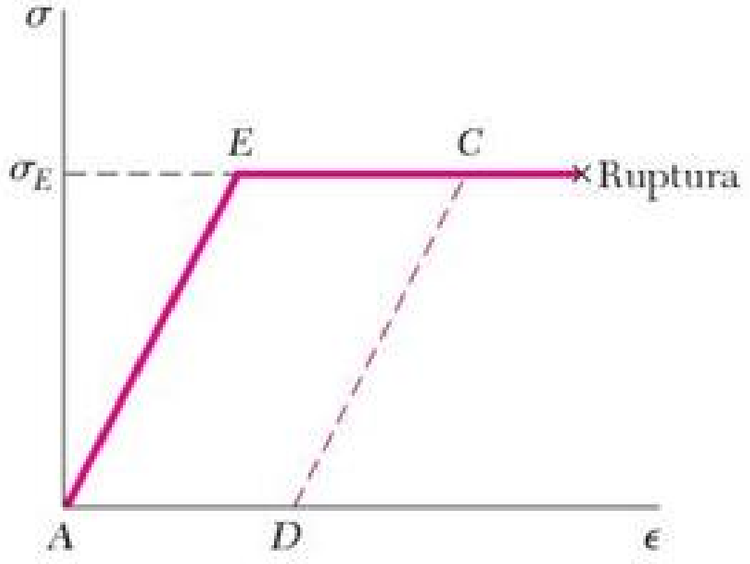


Fig. 2.65

EXEMPLO 2.13

Uma barra de comprimento $L = 500$ mm e seção transversal com área $A = 60$ mm^2 é feita de um material elastoplástico que tem um módulo de elasticidade $E = 200$ GPa em sua região elástica e uma tensão de escoamento $\sigma_E = 300$ MPa. A barra é submetida a uma força axial até que seja atingido um alongamento de 7 mm e a força é então removida. Qual é a deformação permanente resultante?

Consultando o diagrama da Fig. 2.65, verificamos que a deformação específica máxima, representada pela abscissa do ponto C, é

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Em contrapartida, a deformação de escoamento, representada pela abscissa do ponto E, é

$$\epsilon_E = \frac{\sigma_E}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1{,}5 \times 10^{-3}$$

A deformação específica após a remoção da força é representada pela abscissa ϵ_D do ponto D. Notamos da Fig. 2.65 que

$$\epsilon_D = AD = EC = \epsilon_C - \epsilon_E$$
$$= 14 \times 10^{-3} - 1{,}5 \times 10^{-3} = 12{,}5 \times 10^{-3}$$

A deformação permanente é a δ_D correspondente à deformação específica ϵ_D. Temos

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12{,}5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 6{,}25 \text{ mm}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

*2.20. Tensões residuais

No Exemplo 2.13 da seção anterior, consideramos uma barra que foi alongada além da tensão de escoamento. Quando a força foi removida, a barra não voltou ao seu comprimento original; ela tinha sido deformada permanentemente. No entanto, após a remoção da carga, todas as tensões desapareceram. Você não deve considerar que isso sempre acontecerá. Sem dúvida, quando somente algumas das partes de uma estrutura indeterminada sofrem deformações plásticas, como no Exemplo 2.15, ou quando diferentes partes da estrutura sofrem diferentes deformações plásticas, as tensões nas várias partes da estrutura em geral não retornarão a zero depois que a força for removida. Tensões chamadas de *tensões residuais* permanecerão nas várias partes da estrutura.

Embora o cálculo das tensões residuais em uma estrutura real possa ser bastante complexo, o exemplo a seguir lhe dará uma ideia geral do método a ser utilizado para sua determinação.

EXEMPLO 2.16

Determine as tensões residuais na barra e no tubo dos Exemplos 2.14 e 2.15 depois de a carga **P** ser aumentada de zero até 24 kN e diminuída de volta a zero.

Observamos nos diagramas da Fig. 2.70 que, depois de a força **P** retornar a zero, as forças internas P_b e P_t não voltam a ser iguais a zero. Seus valores foram indicados pelo ponto E nas partes a e b, respectivamente, da Fig. 2.70. Segue-se que as tensões correspondentes também não são iguais a zero depois que o conjunto foi descarregado. Para determinar essas tensões residuais, vamos determinar as tensões reversas σ'_b e σ'_t provocadas pelo descarregamento e somá-las às tensões máximas $\sigma_b = 250$ MPa e $\sigma_t = 200$ MPa encontradas na parte a do Exemplo 2.15.

A deformação provocada pelo descarregamento é a mesma na barra e no tubo. Ela é igual a δ'/L, em que δ' é a deformação do conjunto durante o descarregamento, que foi calculado no Exemplo 2.15. Temos

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-13{,}33 \times 10^{-4}\,\text{m}}{800 \times 10^{-3}\,\text{m}} = -1{,}67 \times 10^{-3}\,\text{m/m}$$

As tensões reversas correspondentes na barra e no tubo são

$$\sigma'_b = \epsilon' E_b = (-1{,}67 \times 10^{-3})(200000\ \text{MPa}) = -334\ \text{MPa}$$
$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1{,}67 \times 10^{-3})(80000\ \text{MPa}) = -134\ \text{MPa}$$

As tensões residuais são encontradas superpondo-se as tensões em virtude do carregamento com as tensões reversas em virtude do descarregamento. Temos

$$(\sigma_b)_{\text{res}} = \sigma_b + \sigma'_t = 250\ \text{MPa} - 334{,}0\ \text{MPa} = -84\ \text{MPa}$$
$$(\sigma_t)_{\text{res}} = \sigma_t + \sigma'_t = 200\ \text{MPa} - 134{,}0\ \text{MPa} = 66\ \text{MPa}$$

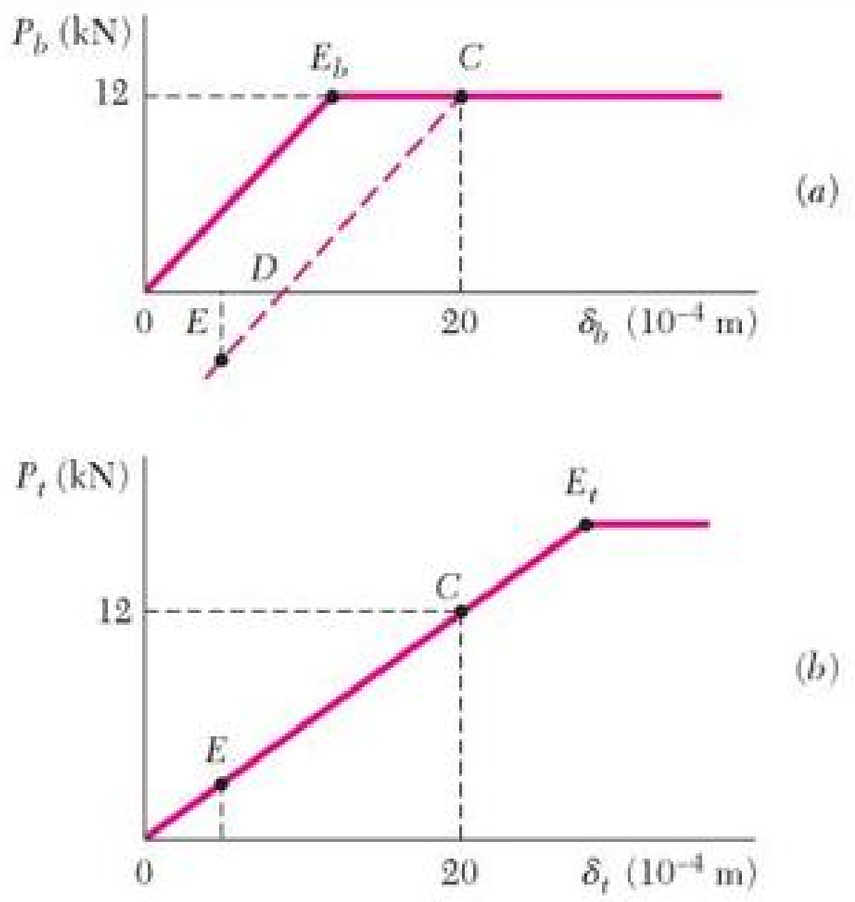


Fig. 2.70

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

2.99 O corpo de prova de alumínio mostrado está submetido a duas forças iguais axiais, opostas e centradas de intensidade P. (*a*) Sabendo que $E = 70$ GPa e $\sigma_{adm} = 200$ MPa, determine o máximo valor admissível de P e o correspondente alongamento total do corpo de prova. (*b*) Resolva a parte *a*, considerando que o corpo de prova foi substituído por uma barra de alumínio de mesmo comprimento e seção retangular uniforme de 60 × 15 mm.

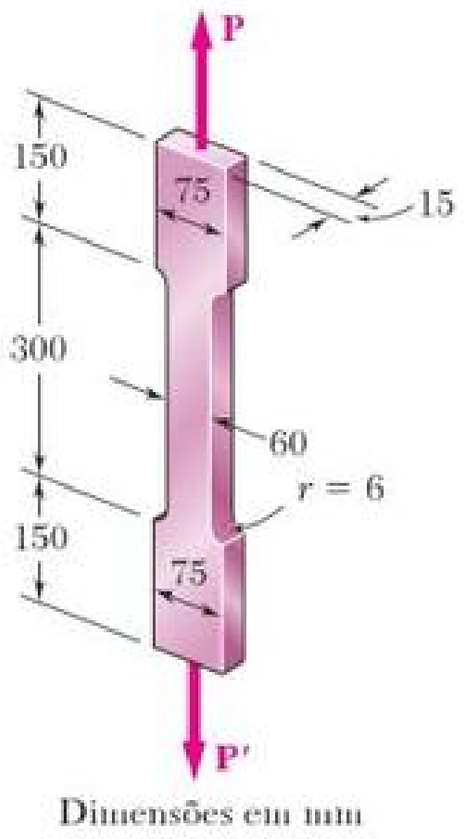


Fig. P2.99

2.100 Para o corpo de prova do Problema 2.99, determine o valor máximo da tensão normal que corresponde a um alongamento total de 0,75 mm.

2.101 A barra AB é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 248$ MPa. Depois de a barra ter sido fixada a uma alavanca rígida CD, descobriu-se que a extremidade C está 9,53 mm mais alta do que deveria estar. Uma força vertical **Q** é aplicada a C até que esse ponto se mova para a posição C'. Determine a intensidade necessária de **Q** e o deslocamento δ_1 para que a alavanca volte para uma posição horizontal depois que **Q** for removida.

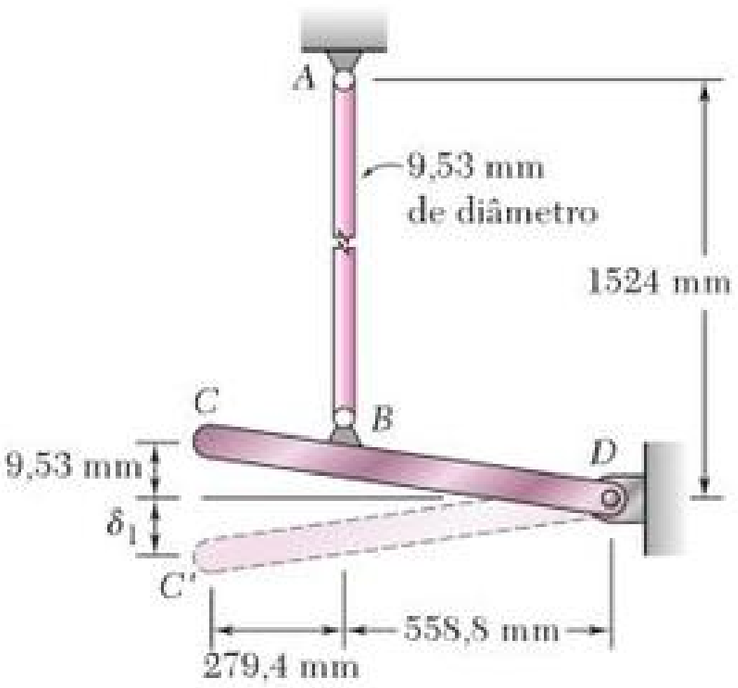


Fig. P2.101

2.102 Resolva o Problema 2.101 supondo que a tensão de escoamento do aço doce seja de 345 MPa.

2.103 A barra retangular AB, com lado de 30 mm, tem comprimento $L = 2{,}2$ m e é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra até que a extremidade A tenha se movido para baixo por um valor δ_m. Determine o valor máximo da força **P** e a deformação permanente da barra depois que a força é removida, sabendo que (*a*) $\delta_m = 4{,}5$ mm e (*b*) $\delta_m = 8{,}0$ mm.

2.104 A barra retangular AB, com lado de 30 mm, tem comprimento $L = 2{,}5$ m e é feita de um aço doce considerado elastoplástico com $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 345$ MPa. Uma força **P** é aplicada à barra e em seguida removida para dar a ela uma deformação permanente δ_p. Determine o valor máximo da força **P** e o valor máximo δ_m pelo qual a barra deverá ser alongada se o valor desejado de δ_p for (*a*) 3,5 mm e (*b*) 6,5 mm.

Figs. *P2.103* e *P2.104*

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 2

Esse capítulo foi dedicado à introdução do conceito de *deformação específica*, para a discussão das relações entre tensão e deformação específica para vários tipos de materiais e para a determinação das deformações de elementos estruturais sob carregamento axial.

Considerando uma barra de comprimento L e seção transversal uniforme, e designando por δ sua deformação sob força axial **P** (Fig. 2.1), definimos a *deformação específica normal* ϵ na barra como a *deformação por unidade de comprimento* [Seção 2.2]:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

No caso de uma barra de seção transversal variável, a deformação específica normal foi definida em um ponto qualquer Q considerando um pequeno elemento da barra em Q. Designando por Δx o comprimento do elemento e por $\Delta\delta$ sua deformação sob determinada força, escrevemos

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Construindo um gráfico da tensão σ em função da deformação específica ϵ à medida que a força é aumentada, obtivemos o *diagrama tensão-deformação* para o material utilizado [Seção 2.3]. A partir desse diagrama, pudemos fazer uma distinção entre materiais *frágeis* e materiais *dúcteis*. Um corpo de prova feito com um material frágil se rompe sem que seja observada uma mudança prévia na taxa de alongamento (Fig. 2.11), enquanto um corpo de prova feito de um material dúctil *escoa* após alcançar uma tensão crítica σ_E, chamada de *resistência ao escoamento*, isto é, o corpo de prova sofre uma grande deformação antes da ruptura, com aumento relativamente pequeno na força aplicada (Fig. 2.9). Um exemplo de material frágil com diferentes propriedades em tração e compressão é o do *concreto*.

Deformação específica normal

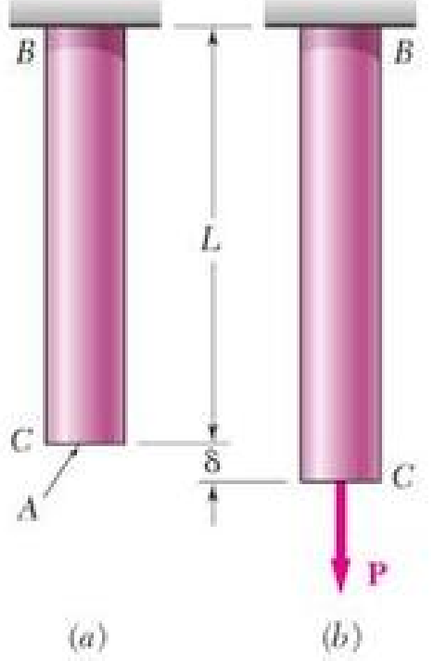
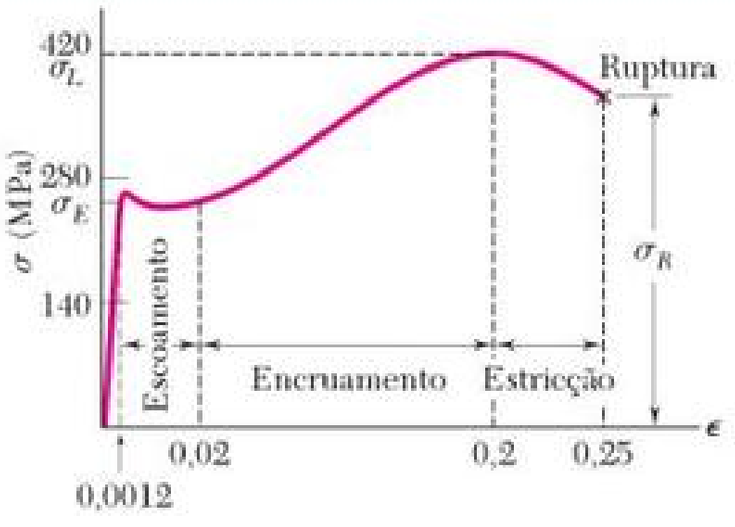
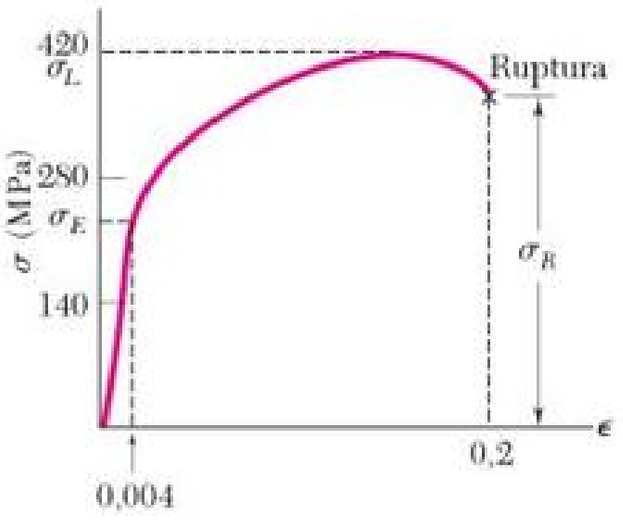


Fig. 2.1

Diagrama tensão-deformação



(*a*) Aço com baixo teor de carbono



(*b*) Liga de alumínio

Fig. 2.9

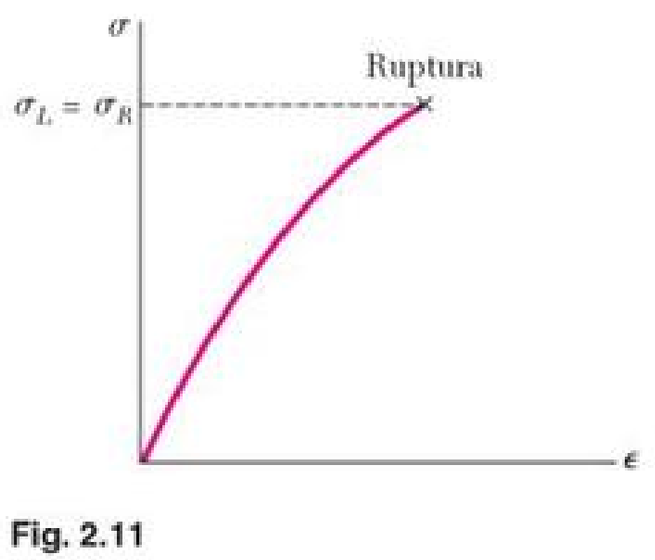


Fig. 2.11

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

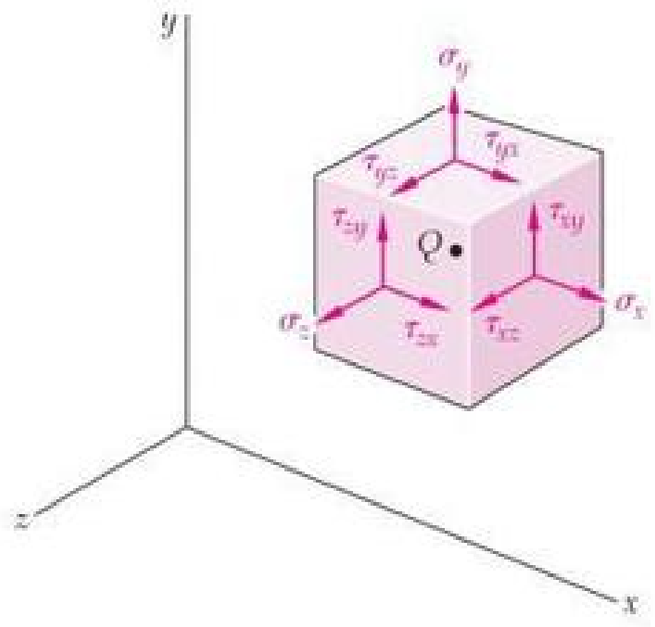


Fig. 2.45

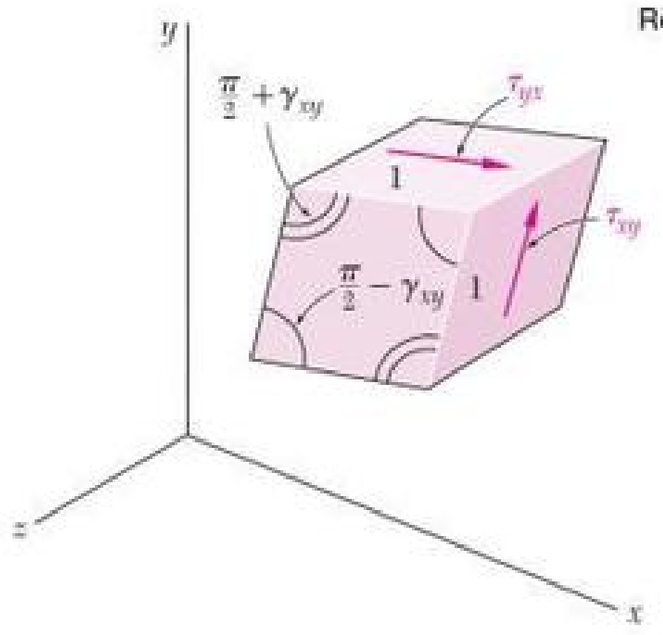


Fig. 2.47

Conforme vimos no Capítulo 1, o estado de tensão em um material sob as condições mais generalizadas de carregamento envolve tensões de cisalhamento, bem como tensões normais (Fig. 2.45). As tensões de cisalhamento tendem a deformar um elemento cúbico do material transformando-o em um paralelepípedo oblíquo [Seção 2.14]. Por exemplo, considerando as tensões τ_{xy} e τ_{yx} mostradas na Fig. 2.47 (as quais, lembramos, são iguais em intensidade), notamos que elas provocaram nos ângulos, formados pelas faces nas quais elas agiam, um aumento ou diminuição por um pequeno ângulo γ_{xy}. Esse ângulo, expresso em radianos, define a *deformação de cisalhamento* correspondente às direções x e y. Definindo de uma forma similar as deformações de cisalhamento γ_{yz} e γ_{zx}, escrevemos as relações

Deformação de cisalhamento. Módulo de elasticidade transversal

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \tag{2.36, 37}$$

que são válidas para qualquer material isotrópico homogêneo dentro de seu limite de proporcionalidade em cisalhamento. A constante G é chamada de *módulo de elasticidade transversal* do material e as relações obtidas expressam a *lei de Hooke para tensão e deformação de cisalhamento*. Juntamente com as Equações (2.28), elas formam um grupo de equações que representam a lei de Hooke generalizada para um material isotrópico homogêneo sob um estado de tensão mais geral.

Observamos na Seção 2.15 que, embora uma força axial exercida sobre uma barra delgada produza somente deformações específicas normais (axial e transversal) em um elemento do material orientado ao longo do eixo da barra, ela produzirá deformações normais e de cisalhamento em um elemento girado em 45° (Fig. 2.53). Notamos também que as três constantes E, ν e G não são independentes; elas satisfazem a relação

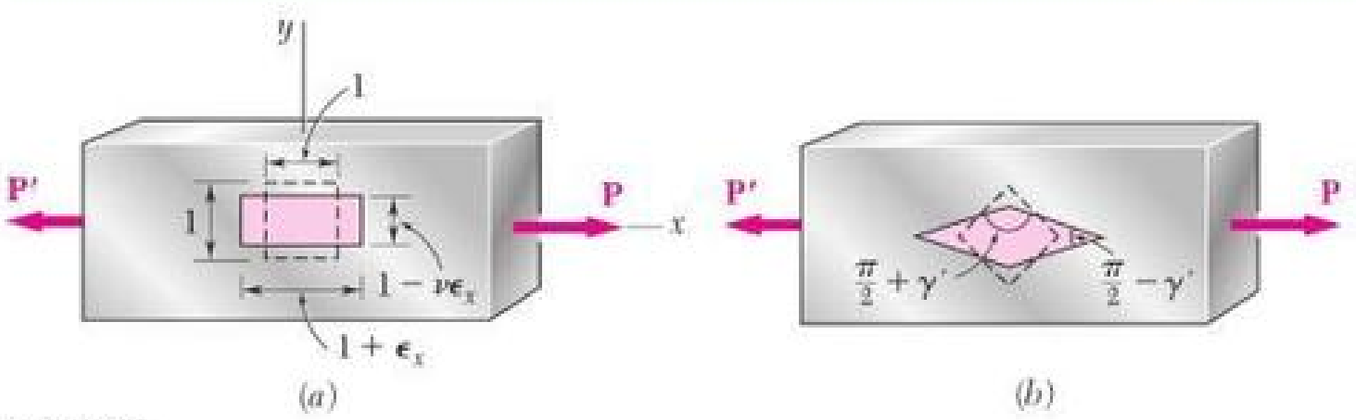


Fig. 2.53

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

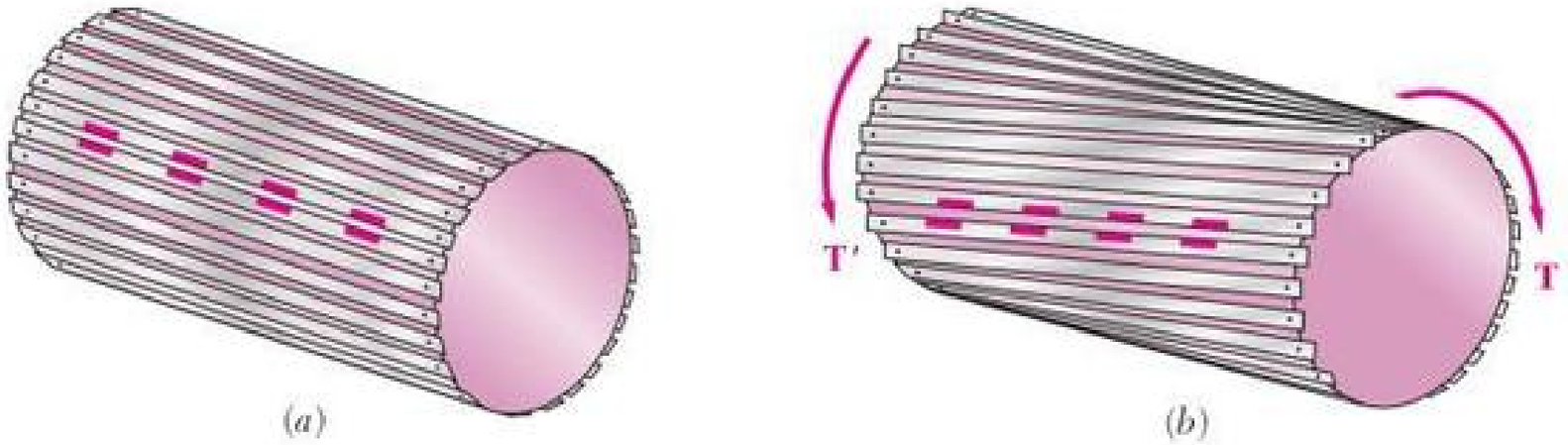


Fig. 3.7

rem na torção, pode ser feita através da consideração de uma "barra" formada por tiras separadas e fixadas por meio de pinos a discos colocados em suas extremidades, como mostra a Fig. 3.7*a*. Se forem pintadas marcas em duas tiras adjacentes, observa-se que as tiras deslizam uma em relação à outra, quando são aplicados torques iguais e opostos nas extremidades da "barra" (Fig. 3.7*b*). Embora esse deslizamento na realidade não ocorra em uma barra feita com um material homogêneo e coesivo, a tendência ao deslizamento existirá, mostrando que ocorrem tensões em planos longitudinais, bem como em planos perpendiculares ao eixo da barra.†

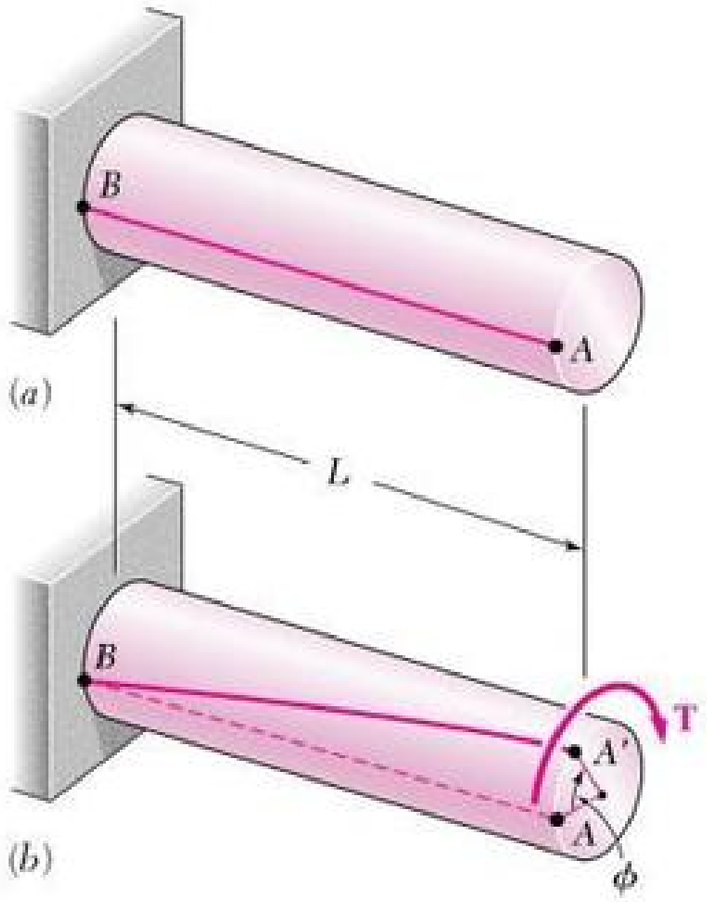


Fig. 3.8

3.3. Deformações em uma barra de seção circular

Considere uma barra de seção circular conectada a um suporte rígido em uma de suas extremidades (Fig. 3.8*a*). Se um torque **T** é aplicado à outra extremidade, a barra sofrerá rotação, com sua extremidade livre girando de um ângulo ϕ chamado de *ângulo de torção* (Fig. 3.8*b*). A observação mostra que, dentro de determinado intervalo de valores de T, o ângulo de torção ϕ é proporcional a T. Ela mostra também que ϕ é proporcional ao comprimento L da barra. Em outras palavras, o ângulo de torção para uma barra do mesmo material e mesma seção transversal, mas duas vezes mais longa, será duas vezes maior sob o mesmo torque T. Um dos objetivos da nossa análise será encontrar a relação existente entre ϕ, L e T; outro objetivo será determinar a distribuição das tensões de cisalhamento na seção transversal da barra, que não conseguimos obter na seção anterior com base apenas na estática.

Neste ponto, deve-se notar uma importante propriedade das barras circulares: quando uma barra circular é submetida à torção, *toda seção transversal plana permanece plana e indeformada*. Em outras palavras, embora as várias seções transversais ao longo da barra sofram rotações de diferentes valores, cada seção transversal gira como um disco rígido. Isso está ilustrado na Fig. 3.9*a*, que mostra a deformação em um modelo de borracha submetido à torção. A propriedade que estamos discutindo é característica das barras de seção circular, sejam elas cheias ou vazadas; ela não vale para elementos de seção transversal não circular. Por exemplo, quando uma barra de seção transversal quadrada é submetida à torção, suas várias seções transversais empenam (sofrem deslocamentos longitudinais) e não permanecem planas (Fig. 3.9*b*).

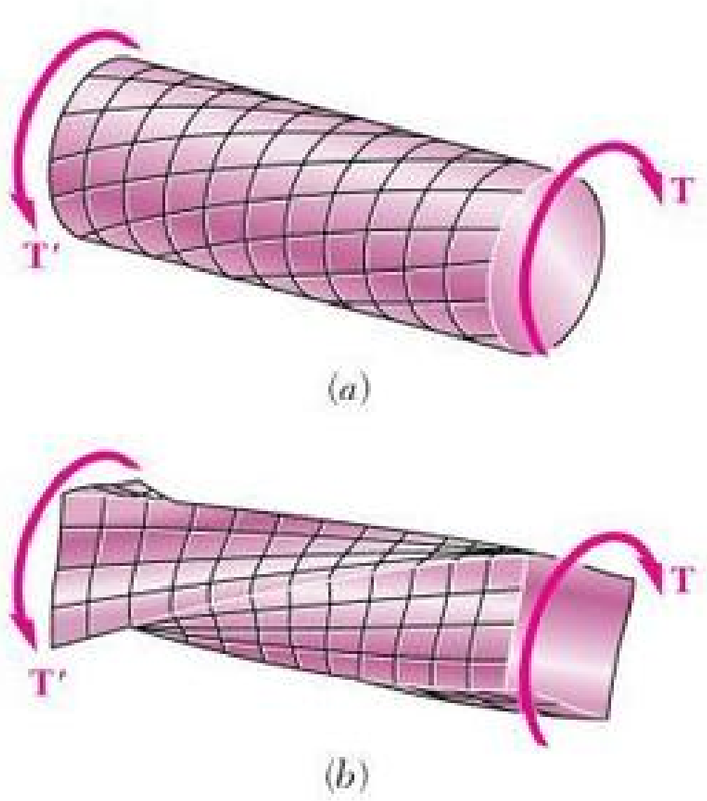


Fig. 3.9

† A rotação de um tubo de cartolina que tenha sido aberto por um corte no sentido do comprimento fornece outra demonstração da existência de tensões de cisalhamento em planos longitudinais.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

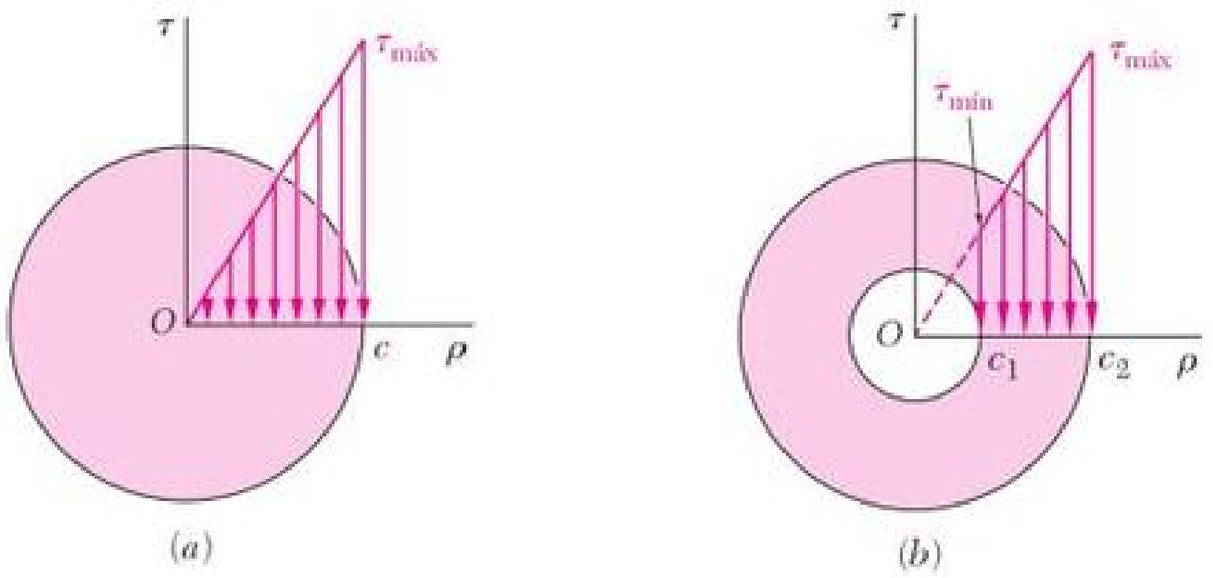


Fig. 3.15 (repetida)

Lembramos agora da Seção 3.2 que a soma dos momentos das forças elementares aplicadas em qualquer seção transversal da barra circular deve ser igual à intensidade T do torque aplicado à barra circular:

$$\int \rho(\tau \, dA) = T \tag{3.1}$$

Substituindo τ de (3.6) em (3.1), escrevemos

$$T = \int \rho\tau \, dA = \frac{\tau_{máx}}{c} \int \rho^2 \, dA$$

Mas a integral no último membro representa o momento polar de inércia J da seção transversal com relação a seu centro O. Temos, portanto

$$T = \frac{\tau_{máx} J}{c} \tag{3.8}$$

ou, resolvendo para $\tau_{máx}$,

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \tag{3.9}$$

Substituindo $\tau_{máx}$ de (3.9) em (3.6), expressamos a tensão de cisalhamento a qualquer distância ρ do eixo da barra circular como

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{3.10}$$

As Equações (3.9) e (3.10) são conhecidas como *fórmulas da torção no regime elástico*. Recordamos da estática que o momento polar de inércia de um círculo de raio c é $J = \frac{1}{2}\pi c^4$. No caso de uma barra de seção circular vazada de raio interno c_1 e raio externo c_2, o momento polar de inércia é

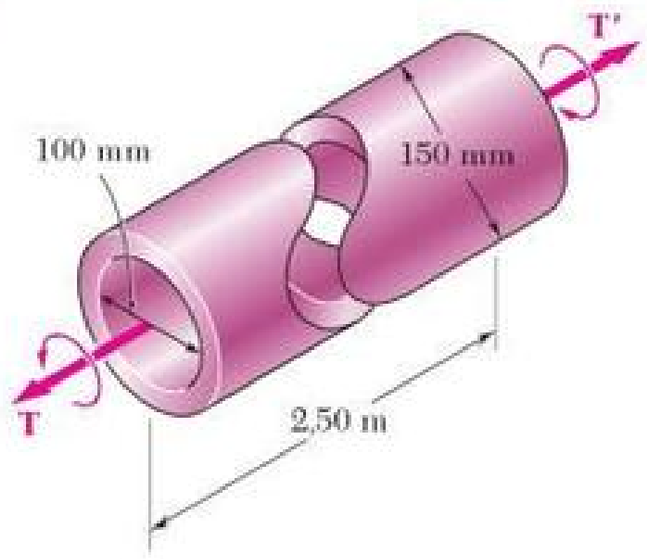
$$J = \tfrac{1}{2}\pi c_2^4 - \tfrac{1}{2}\pi c_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) \tag{3.11}$$

Notamos que em unidades métricas SI, na Equação (3.9) ou (3.10), T será expresso em N · m, c ou ρ em metros, e J em m^4; verificamos que a tensão de cisalhamento resultante será expressa em N/m^2, ou seja, pascals (Pa).

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

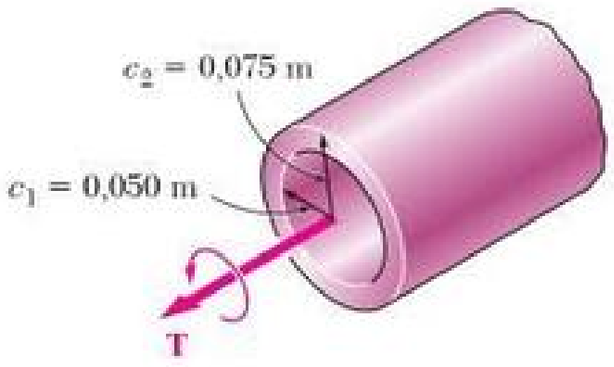
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 3.2

O projeto preliminar de um grande eixo conectando um motor a um gerador determinou que o eixo escolhido fosse vazado e com diâmetros interno e externo de 100 mm e 150 mm, respectivamente. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 82 MPa, determine o valor do torque máximo que pode ser transmitido (*a*) pelo eixo conforme o projeto preliminar, (*b*) por um eixo de seção cheia com o mesmo peso, (*c*) por um eixo de seção vazada com o mesmo peso e com diâmetro externo de 200 mm.

SOLUÇÃO



***a*. Eixo vazado conforme foi projetado.** Para o eixo vazado, temos

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0{,}075\text{ m})^4 - (0{,}050\text{ m})^4] = 39{,}9 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Utilizando a Equação (3.9), escrevemos

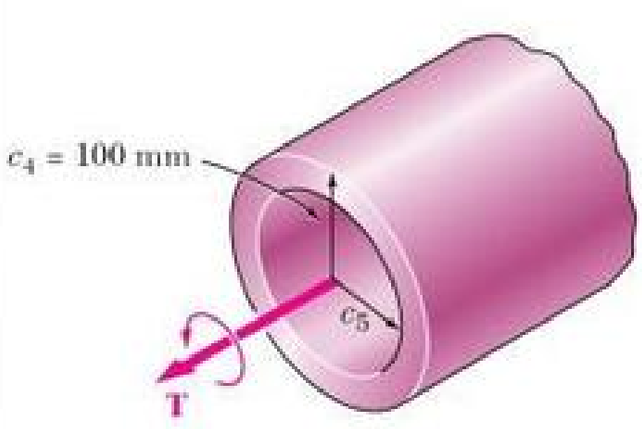
$$\tau_{máx} = \frac{Tc_2}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}075\text{ m})}{39{,}9 \times 10^{-6}\text{ m}^4} \qquad T = 43{,}6\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

***b*. Eixo de seção cheia de mesmo peso.** Para que o eixo projetado e a seção transversal cheia tenham o mesmo peso e comprimento, suas áreas de seção transversal devem ser iguais.

$$A_{(a)} = A_{(b)}$$
$$\pi[(0{,}075\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2] = \pi c_3^2 \qquad c_3 = 0{,}056\text{ m}$$

Como $\tau_{adm} = 82$ MPa, escrevemos

$$\tau_{máx} = \frac{Tc_3}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}056\text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0{,}056\text{ m})^4} \qquad T = 22{,}62\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$



***c*. Eixo vazado com 200 mm de diâmetro externo.** Para ter o mesmo peso, as áreas das seções transversais devem ser iguais. Determinamos o diâmetro interno do eixo escrevendo

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$
$$\pi[(0{,}075\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2] = \pi[(0{,}100\text{ m})^2 - c_5^2] \qquad c_5 = 0{,}083\text{ m}$$

Para $c_5 = 0{,}083$ m e $c_4 = 100$ mm

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}100\text{ m})^4 - (0{,}083\text{ m})^4] = 8{,}25 \times 10^{-5}\text{ m}^4$$

Com $\tau_{adm} = 82$ MPa e $c_4 = 100$ mm

$$\tau_{máx} = \frac{Tc_4}{J} \qquad 82\text{ MPa} = \frac{T(0{,}10\text{ m})}{8{,}25 \times 10^{-5}\text{ m}^4} \qquad T = 67{,}65\text{ kN} \cdot \text{m} \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

3.21 Um torque de intensidade $T = 904$ kN · mm é aplicado em D, como mostra a figura. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 51,7 MPa em cada eixo, determine o diâmetro necessário do (*a*) eixo AB e (*b*) eixo CD.

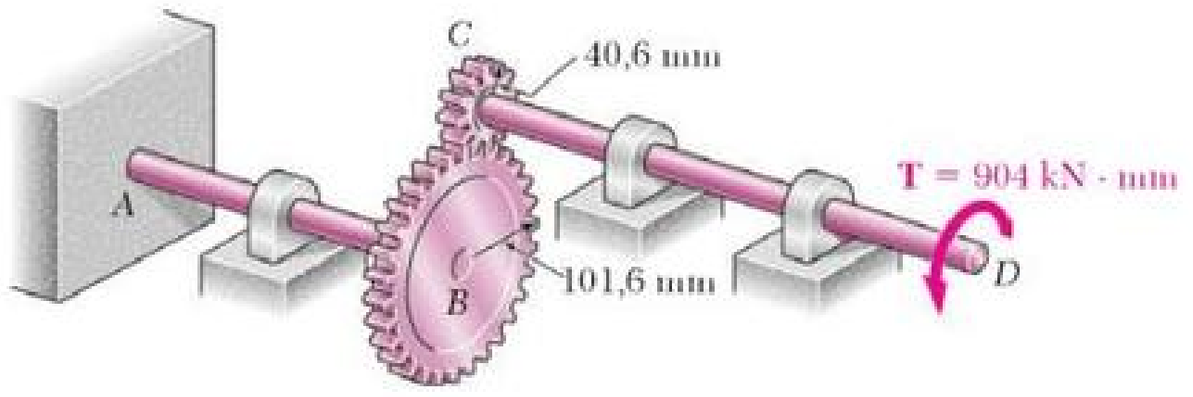


Fig. P3.21 e *P3.22*

3.22 Um torque de $T = 904$ kN · mm é aplicado em D, como mostra a figura. Sabendo que o diâmetro do eixo AB é de 57,1 mm e que o diâmetro do eixo CD é de 45 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima no (*a*) eixo AB e (*b*) eixo CD.

3.23 Dois eixos de aço com seção transversal cheia são conectados por engrenagens conforme mostra a figura. É aplicado um torque de intensidade $T = 900$ N · m no eixo AB. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e considerando somente tensões causadas por torção, determine o diâmetro necessário para (*a*) o eixo AB e (*b*) o eixo CD.

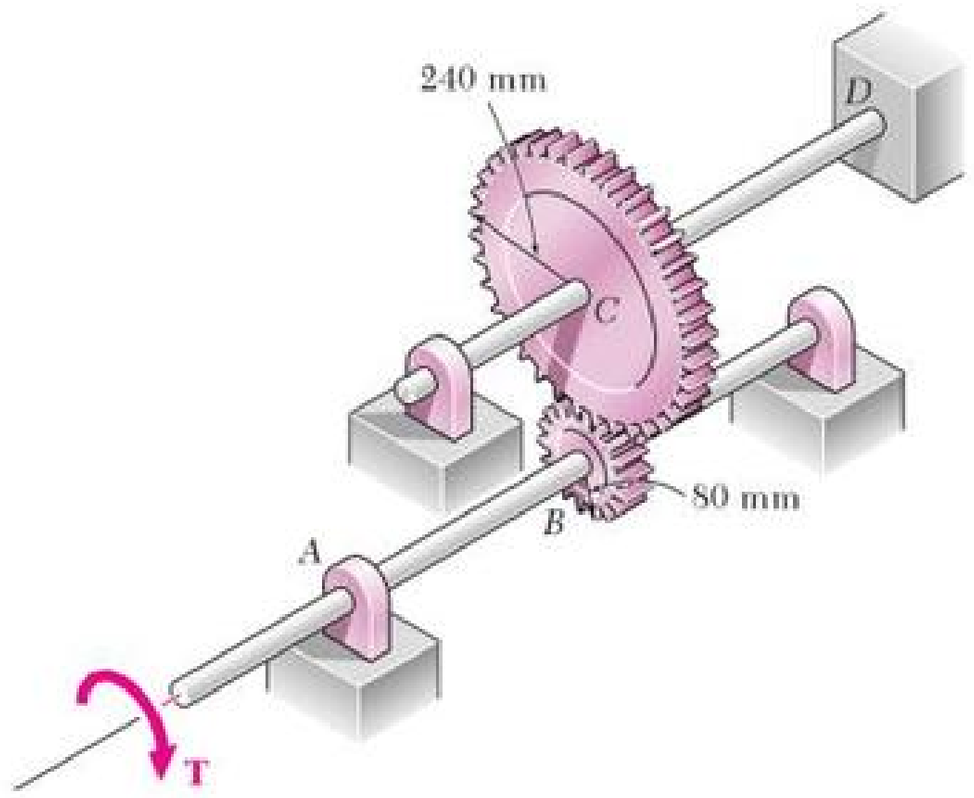


Fig. P3.23 e P3.24

3.24 O eixo CD é feito de uma barra de 66 mm de diâmetro e está conectado ao eixo AB de 48 mm de diâmetro, como mostra a figura. Considerando somente tensões em decorrência da torção e sabendo que a tensão de cisalhamento admissível é de 60 MPa para cada eixo, determine o maior torque **T** que pode ser aplicado.

3.25 Os dois eixos de seção transversal cheia estão conectados por engrenagens como você pode ver na figura e são feitos de um aço para o qual a tensão de cisalhamento admissível é de 48,3 MPa. Sabendo que os diâmetros dos dois eixos são, respectivamente, $d_{BC} = 40{,}6$ mm e $d_{EF} = 31{,}8$ mm, determine o maior torque $\mathbf{T}_C$ que pode ser aplicado em C.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

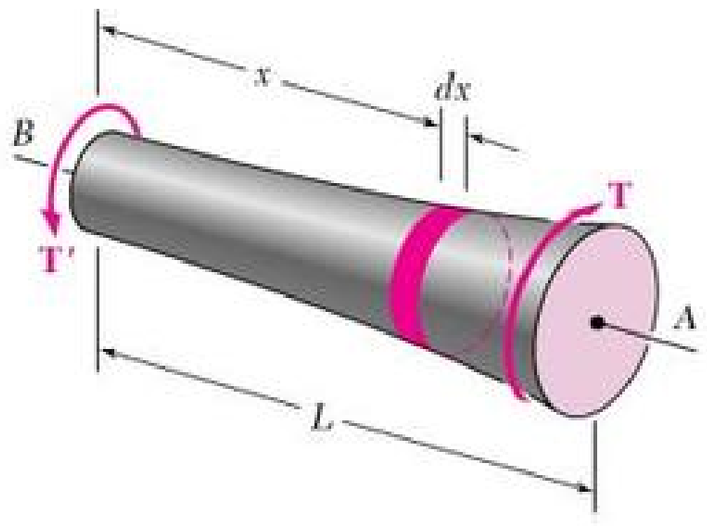


Fig. 3.25

to, que já foi explicado na Seção 3.4 e ilustrado na Fig. 3.17, é aplicado no Problema Resolvido 3.3.

No caso de um eixo com uma seção circular variável, como mostra a Fig. 3.25, a Equação (3.16) pode ser aplicada a um disco de espessura dx. O ângulo segundo o qual uma face do disco gira em relação a outra é, portanto,

$$d\phi = \frac{T\,dx}{JG}$$

em que J é uma função de x que pode ser determinada. Integrando em x de 0 a L, obtemos o ângulo total de torção do eixo:

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{JG} \tag{3.18}$$

O eixo mostrado na Fig. 3.22, utilizado para deduzir a Equação (3.16) e o eixo da Fig. 3.16, discutido nos Exemplos 3.2 e 3.3, tinham ambos uma das extremidades engastada a um suporte fixo. Em cada caso, portanto, o ângulo de torção ϕ do eixo era igual ao ângulo de rotação de sua extremidade livre. No entanto, quando ambas as extremidades de um eixo giram, o ângulo de torção do eixo é igual ao ângulo pelo qual uma extremidade do eixo gira *em relação a outra*. Considere, por exemplo, o conjunto mostrado na Fig. 3.26*a*, que consiste em dois eixos elásticos AD e BE, cada um deles com comprimento L, raio c e módulo de elasticidade transversal G, que estão ligados a engrenagens acopladas em C. Se for aplicado um torque **T** em E (Fig. 3.26*b*), ambos os eixos sofrerão torção. Como a extremidade D do eixo AD está fixa, o ângulo de torção de AD é medido pelo ângulo de rotação ϕ_A da extremidade A. No entanto, como ambas as extremidades do eixo BE giram, o ângulo de torção de BE é igual à diferença entre os ângulos de rotação ϕ_B e ϕ_E, isto é, o ângulo de torção é igual ao ângulo segundo o qual a extremidade E gira em relação à extremidade B. Designando esse ângulo relativo de rotação por $\phi_{E/B}$, escrevemos

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$

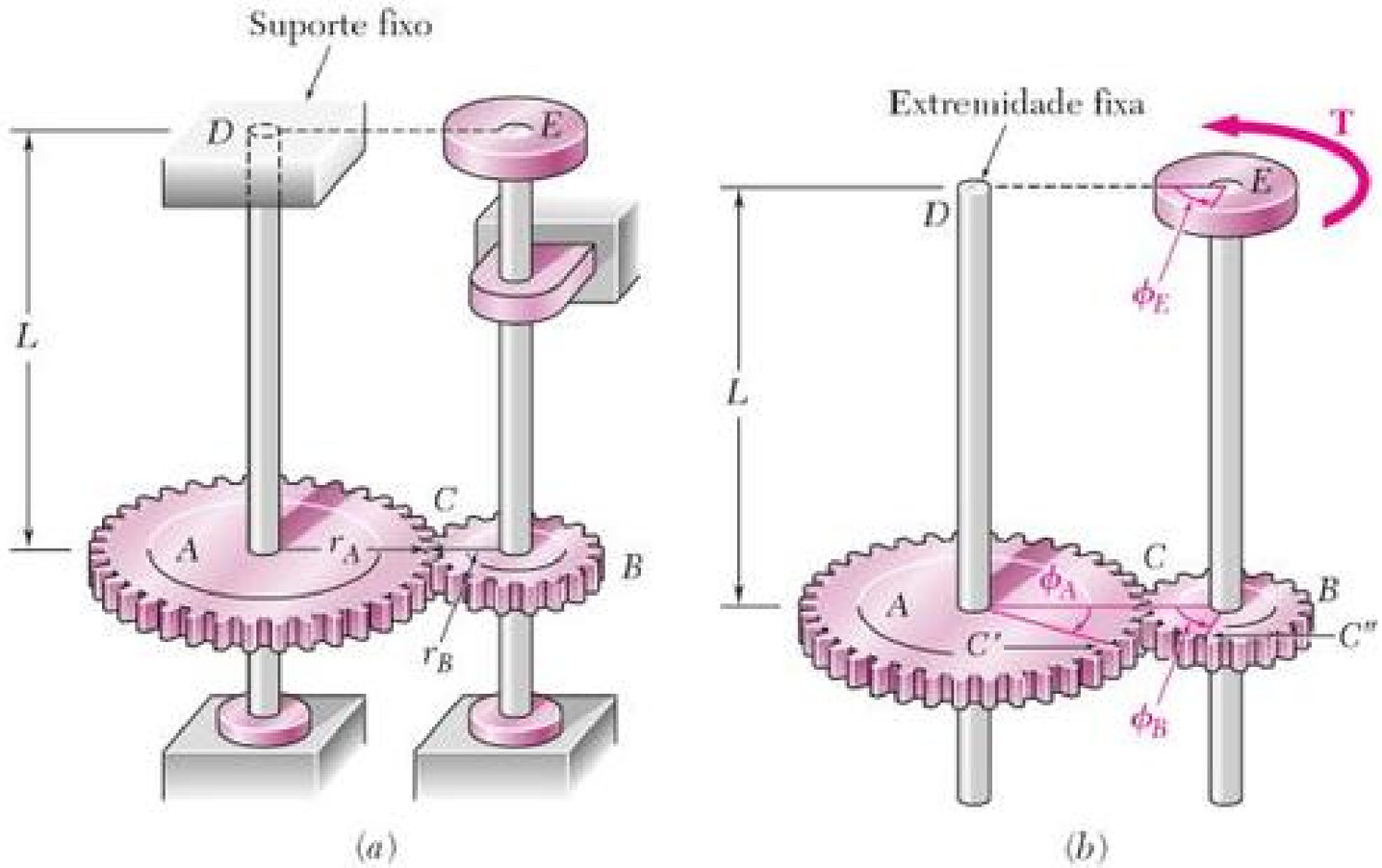


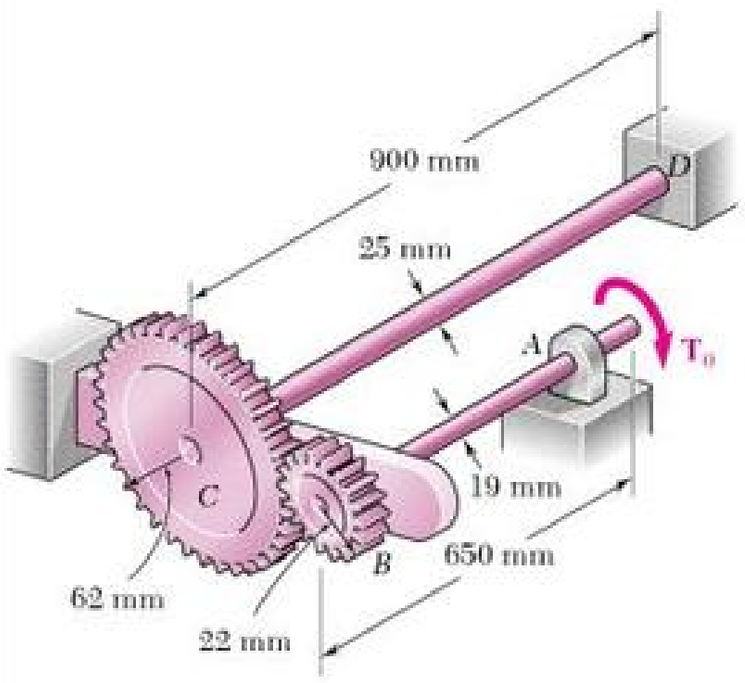
Fig. 3.26

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMA RESOLVIDO 3.4



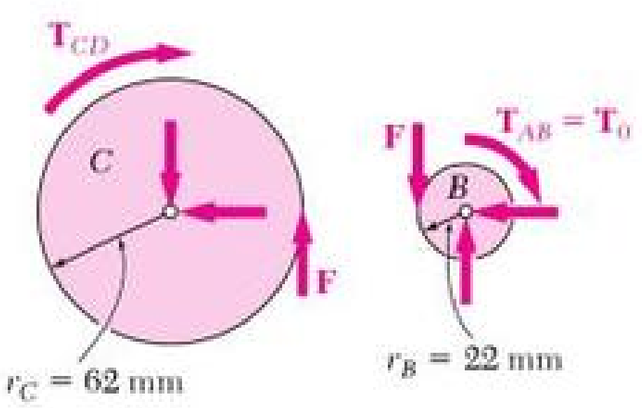
Dois eixos cheios de aço estão acoplados pelas engrenagens mostradas na figura. Sabendo que para cada eixo $G = 77{,}2$ GPa, e que a tensão de cisalhamento admissível é de 55 MPa, determine (*a*) o maior torque $\mathbf{T}_0$ que pode ser aplicado à extremidade *A* do eixo *AB* e (*b*) o ângulo correspondente pelo qual a extremidade *A* do eixo *AB* gira.

SOLUÇÃO

Estática. Chamando de *F* a intensidade da força tangencial entre os dentes da engrenagem, temos

$$\textit{Engrenagem B.}\quad \Sigma M_B = 0:\quad F(22\text{ mm}) - T_0 = 0$$
$$\textit{Engrenagem C.}\quad \Sigma M_C = 0:\quad F(62\text{ mm}) - T_{CD} = 0$$
$$T_{CD} = 2{,}82T_0 \qquad (1)$$

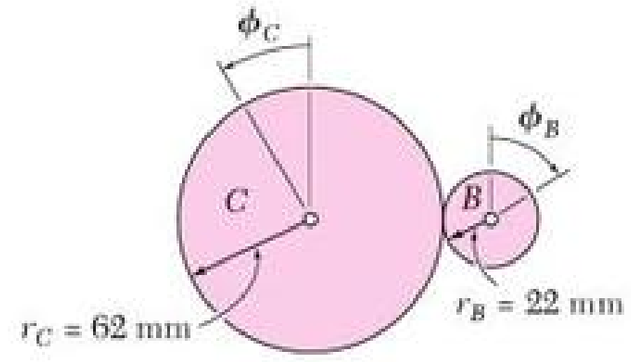
Cinemática. Notando que os movimentos periféricos das engrenagens são iguais, escrevemos



$$r_B\phi_B = r_C\phi_C \qquad \phi_B = \phi_C\frac{r_C}{r_B} = \phi_C\frac{62\text{ mm}}{22\text{ mm}} = 2{,}82\phi_C \qquad (2)$$

a. Torque T_0

***Eixo* AB.** Com $T_{AB} = T_0$ e $c = 9{,}5$ mm, juntamente com uma tensão de cisalhamento máxima admissível de 55 MPa, escrevemos



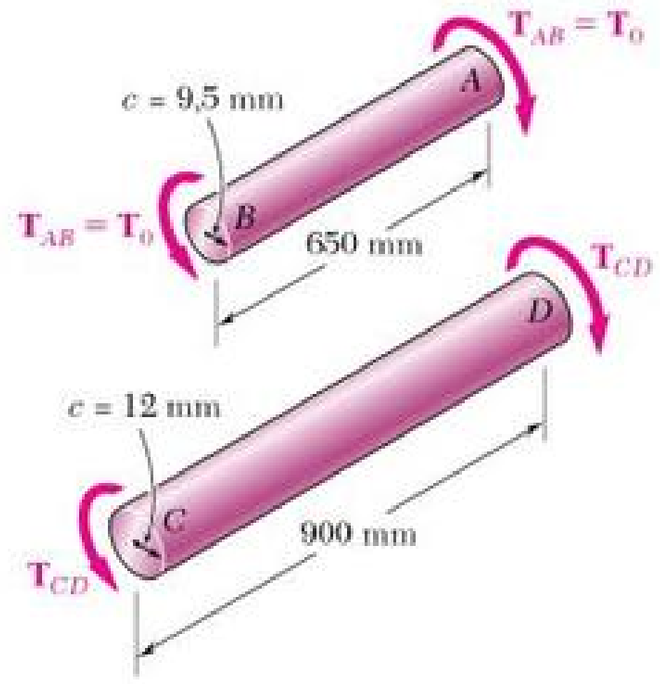
$$\tau = \frac{T_{AB}c}{J} \qquad 55\text{ MPa} = \frac{T_0(9{,}5\text{ mm})}{\frac{1}{2}\pi(9{,}5\text{ mm})^4} \qquad T_0 = 74{,}07\text{ N}\cdot\text{m} \quad \triangleleft$$

***Eixo* CD.** De (1) temos $T_{CD} = 2{,}82\ T_0$. Com $c = 12{,}5$ mm e $\tau_{adm} = 55$ MPa, escrevemos

$$\tau = \frac{T_{CD}c}{J} \qquad 55\text{ MPa} = \frac{2{,}82T_0(12{,}5\text{ mm})}{\frac{1}{2}\pi(12{,}5\text{ mm})^4} \qquad T_0 = 59{,}84\text{ N}\cdot\text{m} \quad \triangleleft$$

Torque máximo permitido. Escolhemos o menor valor obtido para T_0

$$T_0 = 59{,}84\text{ N}\cdot\text{m} \quad \blacktriangleleft$$



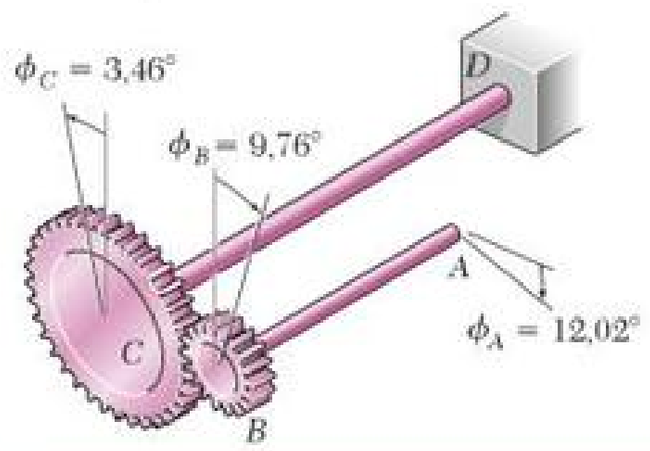
***b*. Ângulo de rotação da extremidade A.** Primeiro calculamos o ângulo de torção para cada eixo.

***Eixo* AB.** Para $T_{AB} = T_0 = 59{,}84\text{ N}\cdot\text{m}$, temos

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{JG} = \frac{(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})(0{,}650\text{ m})}{\frac{1}{2}\pi(0{,}0095\text{ m})^4(77{,}2\times10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}0394\text{ rad} = 2{,}26°$$

***Eixo* CD.** $T_{CD} = 2{,}82\ T_0 = 2{,}82(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})$

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{JG} = \frac{2{,}82(59{,}84\text{ N}\cdot\text{m})(0{,}900\text{ m})}{\frac{1}{2}\pi(0{,}012\text{ m})^4(77{,}2\times10^9\text{ N/m}^2)} = 0{,}0604\text{ rad} = 3{,}46°$$



Como a extremidade *D* do eixo *CD* está fixa, temos $\phi_C = \phi_{C/D} = 3{,}46°$. Usando (2), calculamos que o ângulo de rotação da engrenagem *B* deve ser

$$\phi_B = 2{,}82\phi_C = 2{,}82(3{,}46°) = 9{,}76°$$

Para a extremidade *A* do eixo *AB*, temos

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 9{,}76° + 2{,}26° \qquad \phi_A = 12{,}02° \quad \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

3.40 Dois eixos, cada um com diâmetro de 22,2 mm, são conectados pelas engrenagens mostradas na figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que o eixo está fixo em F, determine o ângulo pelo qual a extremidade A gira, quando lhe é aplicado um torque de 135,6 N · m.

3.41 Dois eixos de seção transversal cheia estão acoplados por engrenagens, conforme mostra a figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa para cada eixo, determine o ângulo de rotação da extremidade A quando $T_A = 1\,200$ N · m.

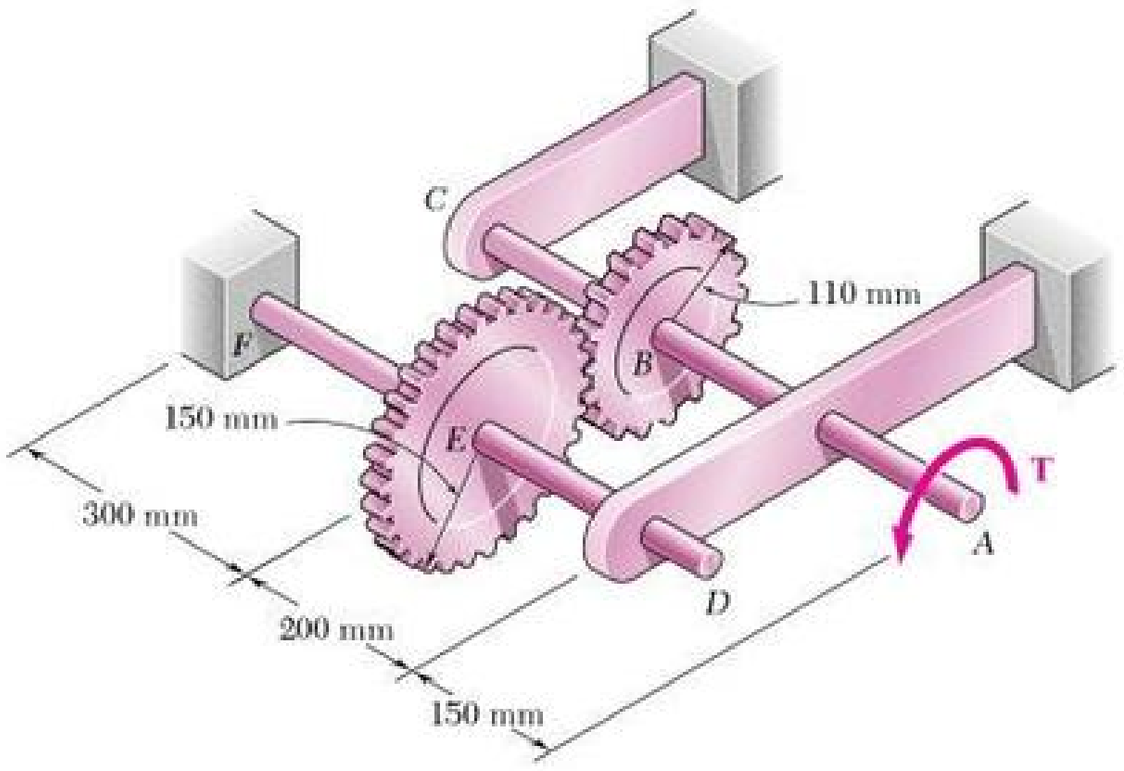


Fig. P3.40

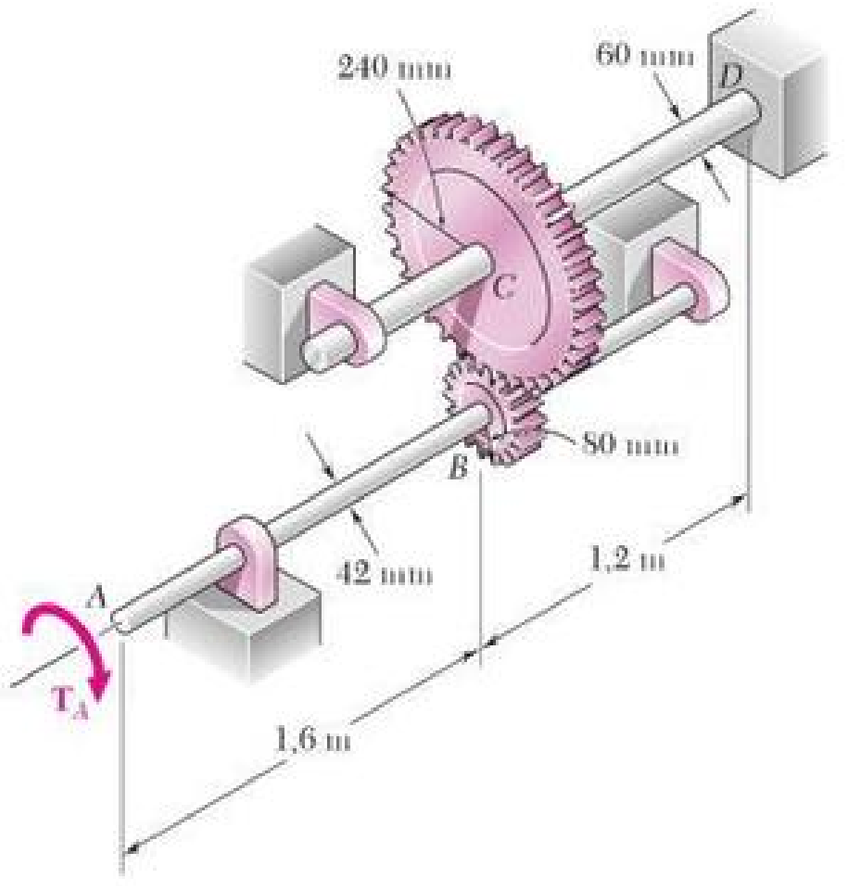


Fig. P3.41

3.42 Resolva o Problema 3.41, considerando que o diâmetro de cada eixo seja de 54 mm.

3.43 Um tacômetro F, utilizado para registrar em forma digital a rotação do eixo A, é conectado ao eixo por meio do trem de engrenagens mostrado, valendo-se de quatro engrenagens e três eixos de aço de seção cheia e diâmetro d. Duas das engrenagens têm raio r e as outras duas têm raios nr. Se a rotação do tacômetro F for impedida, determine em termos de T, l, G, J e n, o ângulo pelo qual a extremidade A gira.

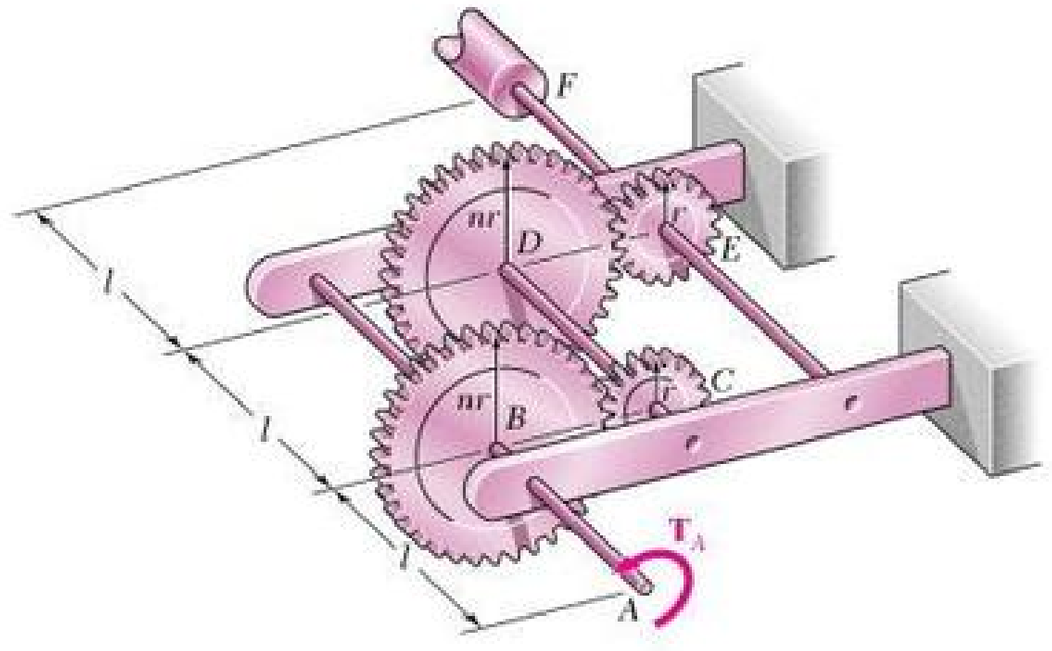


Fig. *P3.43*

3.44 Para o trem de engrenagens descrito no Problema 3.43, determine o ângulo pelo qual a extremidade A gira quando $T = 565$ N · mm, $l = 61$ mm, $d = 1{,}59$ mm, $G = 77{,}2$ GPa e $n = 2$.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

3.8. Concentração de tensões em eixos circulares

A fórmula da torção $\tau_{máx} = Tc/J$ foi deduzida na Seção 3.4 para um eixo circular de seção transversal uniforme. Além do mais, consideramos anteriormente, na Seção 3.3, que o eixo estava carregado em suas extremidades por placas rígidas presas a ele solidamente. No entanto, na prática, os torques são geralmente aplicados ao eixo por meio de acoplamentos com flange (Fig. 3.30*a*) ou de engrenagens conectadas ao eixo por chavetas que se encaixam em cortes (Fig. 3.30*b*). Em ambos os casos espera-se que a distribuição de tensões na seção e proximidades, em que os torques são aplicados, seja diferente daquela dada pela fórmula de torção. Por exemplo, ocorrerão altas concentrações de tensões nas proximidades do corte da chaveta mostrada na Fig. 3.30*b*. A determinação dessas tensões localizadas pode ser feita por métodos experimentais de análise de tensão ou, em alguns casos, por meio da teoria matemática da elasticidade.

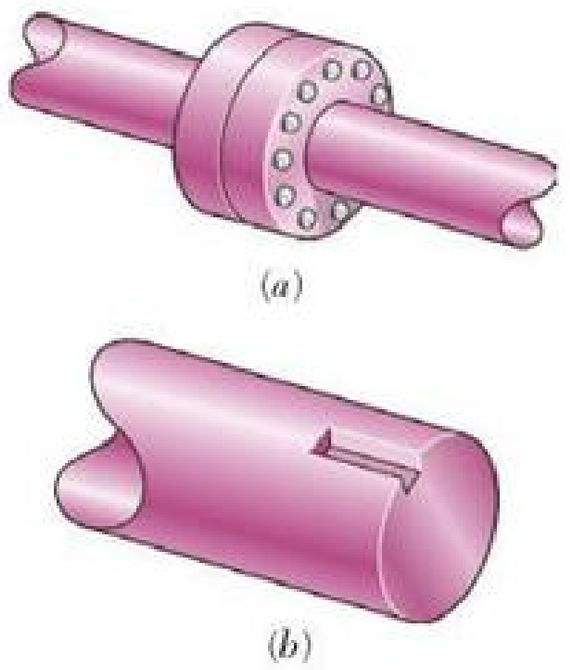


Fig. 3.30

Conforme indicamos na Seção 3.4, a fórmula da torção também pode ser utilizada para um eixo de seção transversal variável. No entanto, no caso de um eixo com uma mudança abrupta no diâmetro de sua seção transversal, as concentrações de tensões ocorrerão próximas da descontinuidade, com as mais altas tensões ocorrendo em *A* (Fig. 3.31). Essas tensões podem ser reduzidas com o adoçamento do ângulo, e o valor máximo da tensão de cisalhamento no adoçamento pode ser expresso como

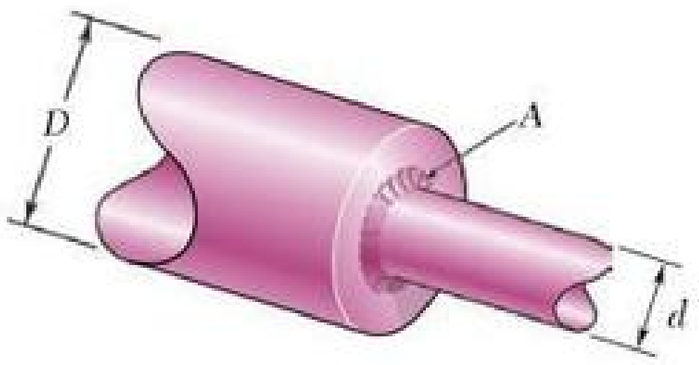


Fig. 3.31

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J} \tag{3.25}$$

em que a tensão Tc/J é a tensão calculada para o menor diâmetro de eixo, e na qual K é o coeficiente de concentração de tensão. Como o coeficiente K depende somente da relação entre os diâmetros e da relação entre o raio do adoçamento e o menor diâmetro, ele pode ser calculado e registrado na forma de uma tabela ou gráfico, como mostra a Fig. 3.32. Devemos notar, no entanto, que esse procedimento para determinar tensões de cisalhamento localizadas é válido somente quando o valor de $\tau_{máx}$, dado pela Equação (3.25), não exceder o limite de proporcionalidade do material. Isso ocorre porque os valores de K representados graficamente na Fig. 3.32 foram obtidos admitindo-se a hipótese de que a relação tensão-deformação no cisalhamento é linear. Se ocorrerem deformações plásticas, elas resultarão em valores de tensão máxima menores do que aqueles indicados pela Equação (3.25).

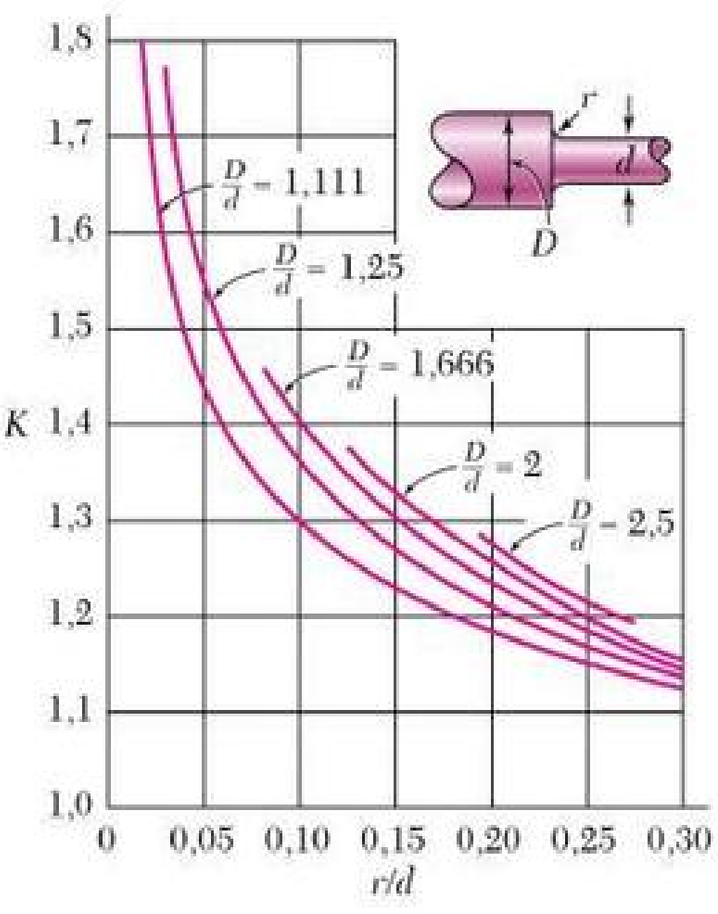


Fig. 3.32 Coeficientes de concentração de tensão para adoçamentos em eixos circulares.†

† PILKEY, W. D. *Petersons stress concentration factors*. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1997.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

3.79 Um eixo de seção transversal cheia feita de aço com 1 524 mm de comprimento e 22,2 mm de diâmetro deve transmitir 18 hp. Determine a velocidade mínima na qual o eixo pode girar, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 31 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 3,5°.

3.80 Um eixo de aço de 2,5 m de comprimento e 30 mm de diâmetro gira a uma frequência de 30 Hz. Determine a potência máxima que o eixo pode transmitir, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é de 50 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 7,5°.

3.81 Um eixo de aço deve transmitir 150 kW à velocidade de 360 rpm. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, projete um eixo de seção transversal cheia de modo que a tensão máxima não exceda 50 MPa e que o ângulo de torção em um comprimento de 2,5 m não exceda 3°.

3.82 Um eixo de aço tubular de 1,5 m de comprimento, com diâmetro externo d_1 de 38 mm e diâmetro interno d_2 de 30 mm, deve transmitir 100 kW entre uma turbina e um gerador. Determine a frequência mínima na qual o eixo pode girar, sabendo que $G = 77{,}2$ GPa, que a tensão de cisalhamento admissível é 60 MPa e que o ângulo de torção não deve exceder 3°.

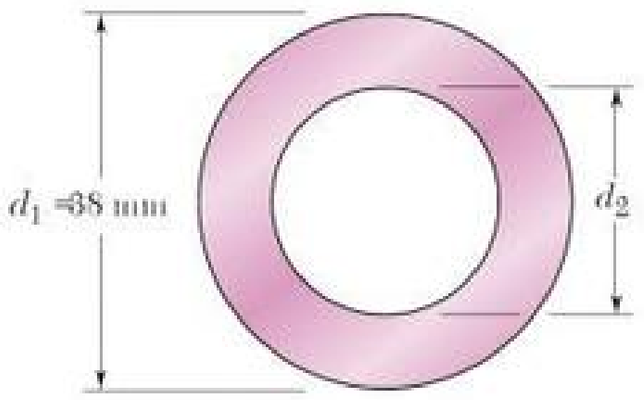


Fig. *P3.82* e P3.83

3.83 Um eixo de aço tubular de 1,5 m de comprimento e diâmetro externo d_1 de 38 mm deve ser feito de um aço para o qual $\tau_{adm} = 65$ MPa e $G = 77{,}2$ GPa. Sabendo que o ângulo de torção não deve exceder 4° quando o eixo é submetido a um torque de 600 N · m, determine o maior diâmetro d_2 que pode ser especificado no projeto.

3.84 O eixo de seção variável mostrado gira a 450 rpm. Sabendo que $r = 5{,}08$ mm, determine a potência máxima que pode ser transmitida sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 51,7 MPa.

3.85 O eixo de seção variável da figura gira a 450 rpm. Sabendo que $r = 12{,}7$ mm, determine a potência máxima que pode ser transmitida sem exceder a tensão de cisalhamento admissível de 51,7 MPa.

Fig. *P3.84* e *P3.85*

3.86 O eixo de seção variável mostrado na figura deve rotacionar com uma frequência de 50 Hz. Sabendo que o raio do adoçamento é $r = 8$ mm e que a tensão de cisalhamento admissível é de 45 MPa, determine a potência máxima que pode ser transmitida.

3.87 Sabendo que o eixo de seção variável mostrado na figura deve transmitir 45 kW na velocidade de 2 100 rpm, determine o raio r mínimo do adoçamento para que a tensão de cisalhamento admissível de 50 MPa não seja excedida.

3.88 O eixo de seção variável mostrado na figura deve transmitir 45 kW. Sabendo que a tensão de cisalhamento admissível no eixo é de 40 MPa e que o raio do adoçamento é $r = 6$ mm, determine a rotação mínima possível no eixo.

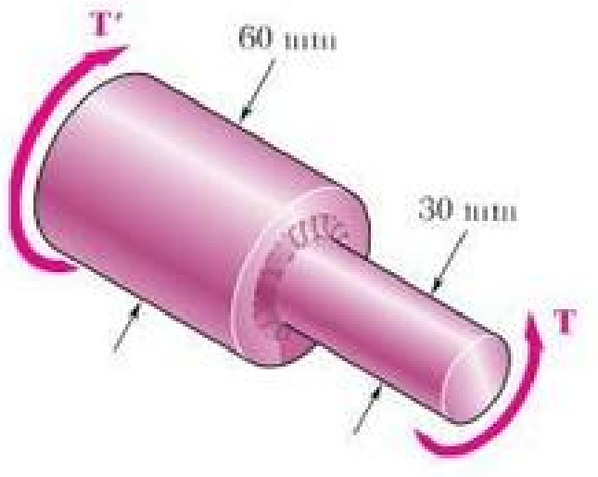


Fig. P3.86, P3.87 e P3.88

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

À medida que o torque aumenta, $\tau_{máx}$ eventualmente atinge o valor τ_E (Fig. 3.38*b*). Substituindo esse valor na Equação (3.9), e resolvendo em relação ao valor correspondente de T, obtemos o valor T_E do *momento torçor* no início do escoamento:

$$T_E = \frac{J}{c}\tau_E \tag{3.28}$$

O valor obtido é conhecido como *momento torçor elástico máximo*, porque ele é o maior momento para o qual a deformação permanece totalmente elástica. Lembrando que, para um eixo circular cheio $J/c = \frac{1}{2}\pi c^3$, temos

$$T_E = \tfrac{1}{2}\pi c^3 \tau_E \tag{3.29}$$

À medida que o momento aumenta, desenvolve-se uma região plástica no eixo, ao redor de um núcleo elástico de raio ρ_E (Fig. 3.38*c*). Na região plástica a tensão é uniformemente igual a τ_E, enquanto no núcleo elástico a tensão varia linearmente com ρ e pode ser expressa como

$$\tau = \frac{\tau_E}{\rho_E}\rho \tag{3.30}$$

Se o momento T aumenta, a região plástica se expande até que, no limite, a deformação é totalmente plástica (Fig. 3.38*d*).

A Equação (3.26) será utilizada para determinar o valor do *momento torçor* T correspondente a determinado raio ρ_E do núcleo elástico. Lembrando que τ é dado pela Equação (3.30) para $0 \le \rho \le \rho_E$, e é igual a τ_E para $\rho_E \le \rho \le c$, escrevemos

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_E} \rho^2 \left(\frac{\tau_E}{\rho_E}\rho\right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_E}^{c} \rho^2 \tau_E \, d\rho \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho_E^3\tau_E + \frac{2}{3}\pi c^3\tau_E - \frac{2}{3}\pi\rho_E^3\tau_E \\ T &= \frac{2}{3}\pi c^3\tau_E\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_E^3}{c^3}\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

ou, em vista da Equação (3.29),

$$T = \frac{4}{3}T_E\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho_E^3}{c^3}\right) \tag{3.32}$$

em que T_E é o *momento torçor* elástico máximo. Notamos que, à medida que ρ_E se aproxima de zero, o momento torçor se aproxima do valor-limite

$$T_p = \frac{4}{3}T_E \tag{3.33}$$

Esse valor do momento, que corresponde a uma deformação totalmente plástica (Fig. 3.38*d*), é chamado de *momento torçor plástico* do eixo considerado. Notamos que a Equação (3.33) é válida somente para um *eixo circular cheio feito de um material elastoplástico.*

Como a distribuição de *deformação* ao longo da seção permanece linear após o início do escoamento, a Equação (3.2) permanece válida e pode ser utilizada para expressar o raio ρ_E do núcleo elástico em termos do ângulo de torção ϕ. Se ϕ for suficientemente grande para provocar uma deformação

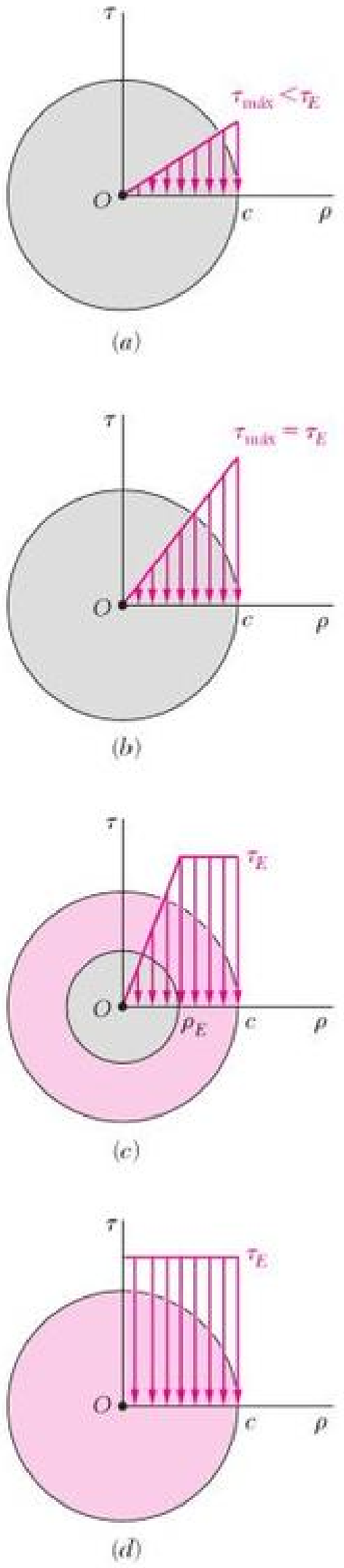


Fig. 3.38

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 3.9

Para o eixo do Exemplo 3.8, determine (*a*) o ângulo de torção permanente e (*b*) a distribuição de tensões residuais, depois que o torque de 4,60 kN · m foi removido.

(a) Ângulo de torção permanente. Recordamos do Exemplo 3.8 que o ângulo de torção correspondente ao torque dado é $\phi = 8{,}50°$. O ângulo ϕ' por meio do qual o eixo desfaz a rotação de torção, quando o torque é removido, é obtido da Equação (3.16). Substituindo os dados fornecidos,

$$T = 4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$L = 1{,}2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

e o valor $J = 614 \times 10^{-9}$ m^4 obtido na solução do Exemplo 3.8, temos

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(1{,}2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 116{,}8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

ou

$$\phi' = (116{,}8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 6{,}69°$$

O ângulo de torção permanente é, portanto

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8{,}50° - 6{,}69° = 1{,}81°$$

(b) Tensões residuais. Recordamos do Exemplo 3.8 que a tensão de escoamento é $\tau_E = 150$ MPa e que o raio do núcleo elástico correspondente ao torque dado é $\rho_E = 15{,}8$ mm. A distribuição das tensões no eixo durante o carregamento é mostrada na Fig. 3.44*a*.

A distribuição de tensões em razão do torque oposto de 4,60 kN · m necessário para descarregar o eixo é linear e está ilustrada na Fig. 3.44*b*. A tensão máxima na distribuição de tensões reversas é obtida da Equação (3.9):

$$\tau'_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4{,}60 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4} = 187{,}3 \text{ MPa}$$

Superpondo as duas distribuições de tensões, obtemos as tensões residuais mostradas na Fig. 3.44*c*. Verificamos que, apesar das tensões reversas excederem a tensão de escoamento τ_E, a suposição de uma distribuição linear dessas tensões é válida, pois elas não excedem $2\tau_E$.

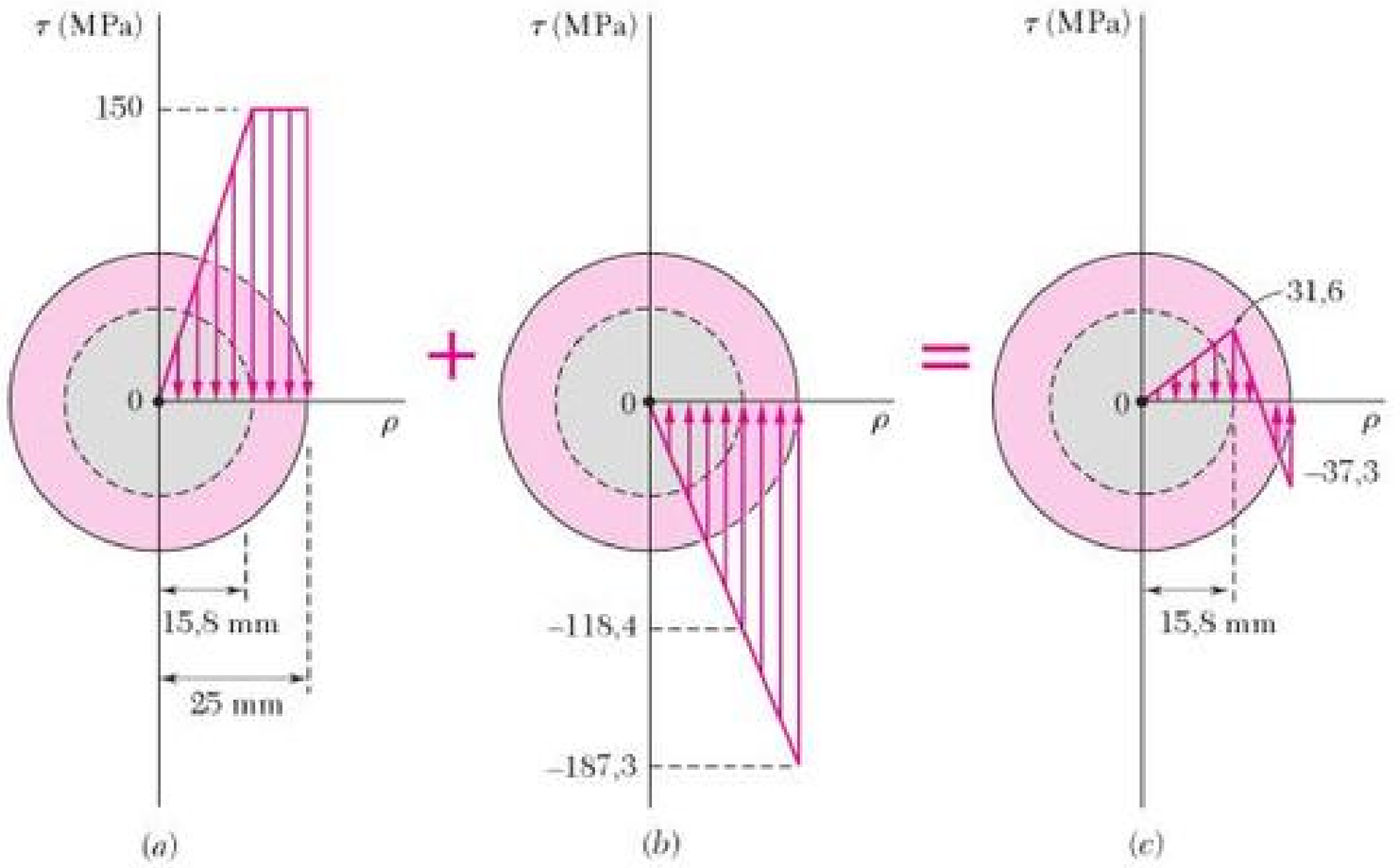


Fig. 3.44

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.1. Introdução

Nos capítulos anteriores estudamos como determinar as tensões nos elementos prismáticos ou barras submetidas a forças axiais ou a momentos torçores. Neste capítulo e nos dois seguintes, analisaremos as tensões e deformações em elementos prismáticos submetidos à *flexão*. Flexão é um conceito importante usado no projeto de muitos componentes de máquinas e componentes estruturais, como vigas e traves.

Este capítulo será dedicado à análise dos elementos prismáticos submetidos a momentos fletores **M** e **M′** iguais e opostos atuando no mesmo plano longitudinal. Dizemos que esses elementos estão em *flexão pura*. Na maior parte do capítulo, consideraremos que os elementos possuam um plano de simetria e que os momentos fletores **M** e **M′** estão atuando naquele plano (Fig. 4.1). Um exemplo de flexão pura é dado pela barra de levantamento de

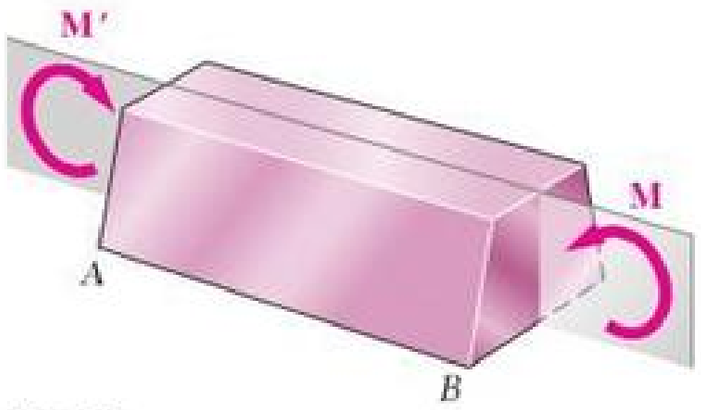


Fig. 4.1

pesos típica quando o atleta a segura acima da cabeça, como mostra a página anterior. A barra suporta pesos iguais a distâncias iguais das mãos do levantador de pesos. Em razão da simetria do diagrama de corpo livre da barra (Fig. 4.2*a*), as reações nas mãos devem ser iguais e opostas aos pesos. Portanto, com relação à parte média *CD* da barra, os pesos e as reações podem ser substituídos por dois momentos fletores iguais e opostos de 108 N · m (Fig. 4.2*b*), mostrando que a parte central da barra está em flexão pura. Uma análise similar do eixo de um pequeno veículo esportivo (Fig. 4.3) mostraria que, entre os dois pontos em que ele está preso ao veículo, o eixo está em flexão pura.

Por mais interessantes que as aplicações diretas da flexão pura possam ser, a dedicação de um capítulo inteiro ao seu estudo não seria justificada se não fosse pelo fato de que os resultados obtidos serão usados na análise de outros tipos de carregamento, como *carregamentos axiais excêntricos* e *carregamentos transversais*.

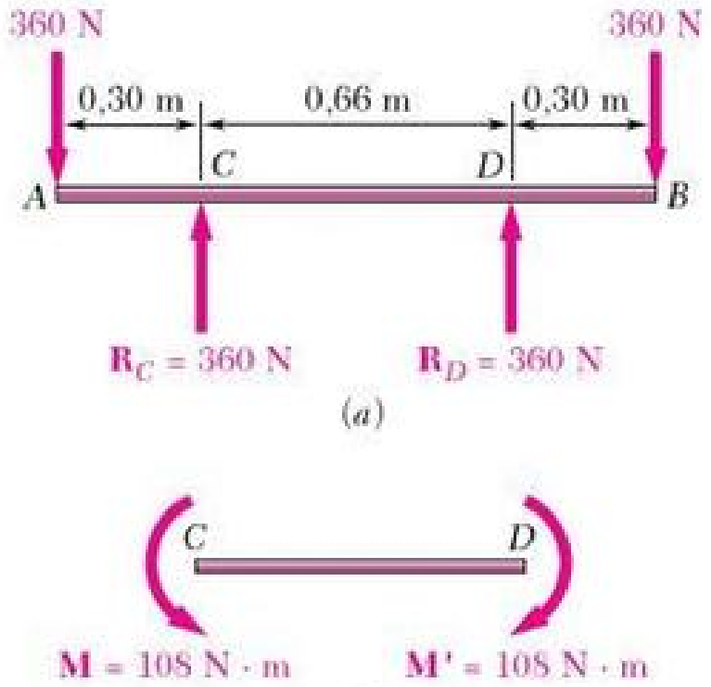


Fig. 4.2

Fig. 4.3 No veículo esportivo mostrado, o segmento central do eixo traseiro está submetido a flexão pura.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.3. Deformações em uma barra de seção simétrica em flexão pura

Vamos agora analisar as deformações de um elemento prismático que possui um plano de simetria e está submetido em suas extremidades a momentos fletores **M** e **M′** iguais e opostos atuando no plano de simetria. O elemento sofrerá flexão sob a ação dos momentos fletores, mas permanecerá simétrico em relação ao outro plano (Fig. 4.9). Além disso, como o momento fletor M é o mesmo em qualquer seção transversal, a barra sofrerá flexão uniforme.

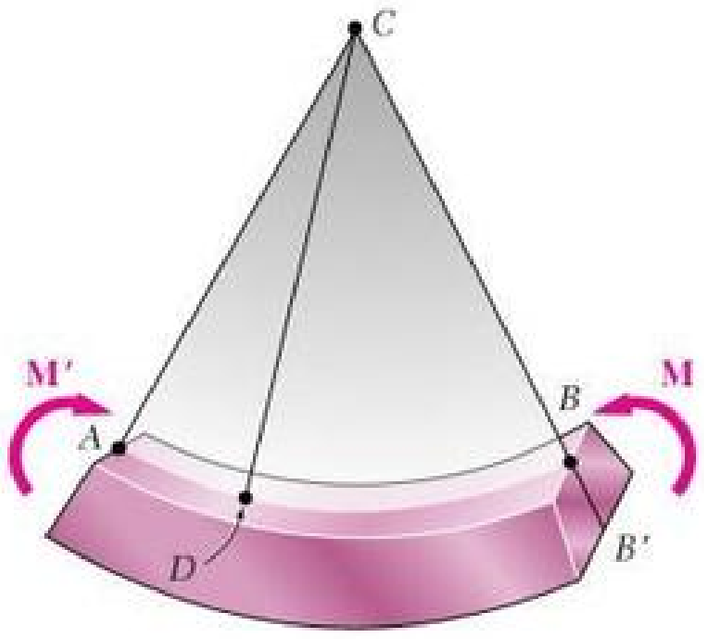


Fig. 4.9

Assim, a linha AB ao longo da qual a face superior da barra intercepta o plano dos momentos fletores terá uma curvatura constante. Em outras palavras, a linha AB, que originalmente era uma linha reta, será transformada em um arco de circunferência de centro C, como também a linha $A'B'$ (não mostrada na figura) ao longo da qual a face inferior da barra intercepta o plano de simetria. Notamos também que a linha AB diminuirá em seu comprimento quando a barra for flexionada conforme mostra a figura, isto é, quando $M > 0$, enquanto $A'B'$ se tornará mais longa.

Em seguida vamos provar que qualquer seção transversal perpendicular ao eixo da barra permanece plana, e que o plano da seção passa por C. Se esse não fosse o caso, poderíamos encontrar um ponto E da seção original, que é a mesma seção à qual D pertence (Fig. 4.10*a*), e que depois de a barra ter sido flexionada, ele *não* estaria mais no plano de simetria que contém a linha CD (Fig. 4.10*b*). Mas, em virtude da simetria da barra, haveria um outro ponto E' que seria transformado exatamente da mesma maneira. Vamos supor que, depois de a viga ter sido flexionada, ambos os pontos estariam localizados à esquerda do plano definido por CD, como mostra a Fig. 4.10*b*. Como o momento fletor M é o mesmo por todo o elemento, uma situação similar seria válida em qualquer outra seção transversal, e os pontos correspondentes a E e E' também se moveriam para a esquerda. Assim, um observador em A concluiria que o carregamento faz os pontos E e E' em várias seções transversais se moverem para a frente (em direção ao observador). Mas um observador em B, para o qual o carregamento parece o mesmo, e que observa os pontos E e E' nas mesmas posições (exceto que agora eles estão invertidos), chegaria a uma conclusão oposta. Essa inconsistência nos leva a concluir que E e E' estarão no mesmo plano definido por CD e, portanto, que a seção permanece plana e passa pelo ponto C. Devemos notar, no entanto, que essa discussão não invalida a possibilidade de deformações *dentro* do plano da seção (veja a Seção 4.5).

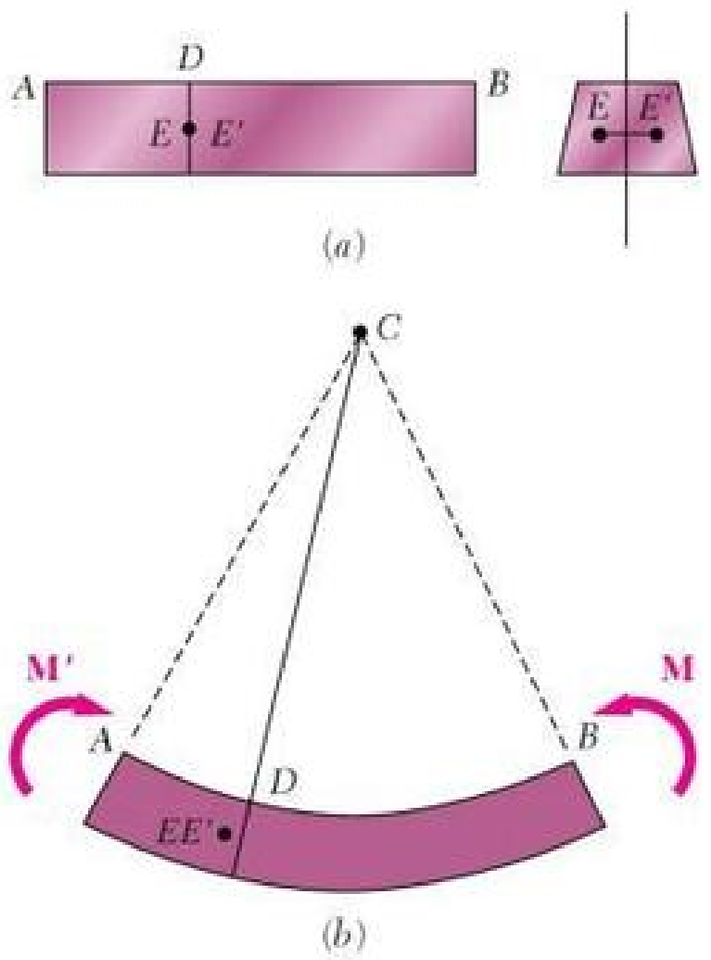


Fig. 4.10

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

ou

$$\frac{\sigma_m}{c}\int y^2\,dA = M \tag{4.14}$$

Lembrando que, no caso de flexão pura, a linha neutra passa pelo centro geométrico da seção transversal, notamos que I é o momento de inércia, ou momento de segunda ordem, da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo centro geométrico e é perpendicular ao plano do momento fletor **M**. Resolvendo (4.14) para σ_m, escrevemos então†

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

Substituindo σ_m de (4.15) em (4.12), obtemos a tensão normal σ_x para qualquer distância y da linha neutra:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

As Equações (4.15) e (4.16) são chamadas de *fórmulas da flexão em regime elástico*, e a tensão normal σ_x provocada pela flexão da viga geralmente é chamada de *tensão de flexão*. Verificamos que a tensão é de compressão ($\sigma_x < 0$) acima da linha neutra ($y > 0$) quando o momento fletor M é positivo, e de tração ($\sigma_x > 0$) quando M é negativo.

Retornando à Equação (4.15), notamos que a relação I/c depende somente da geometria da seção transversal. Essa relação é chamada de *módulo de resistência* e é representada por W. Temos

$$\text{Módulo de resistência} = W = \frac{I}{c} \tag{4.17}$$

Substituindo I/c por W na Equação (4.15), escrevemos essa equação na forma alternativa

$$\sigma_m = \frac{M}{W} \tag{4.18}$$

Como a tensão máxima σ_m é inversamente proporcional ao módulo de resistência W, está claro que as vigas devem ser projetadas com um valor de W o maior possível. Por exemplo, no caso de uma viga de madeira com seção transversal retangular de largura b e altura h, temos

$$W = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \tfrac{1}{6}bh^2 = \tfrac{1}{6}Ah \tag{4.19}$$

em que A é a área da seção transversal da viga. Isso mostra que no caso de duas vigas com a mesma área A de seção transversal (Fig. 4.14), aquela com a altura h maior terá um módulo de resistência maior e, portanto, terá uma capacidade maior para resistir à flexão.‡

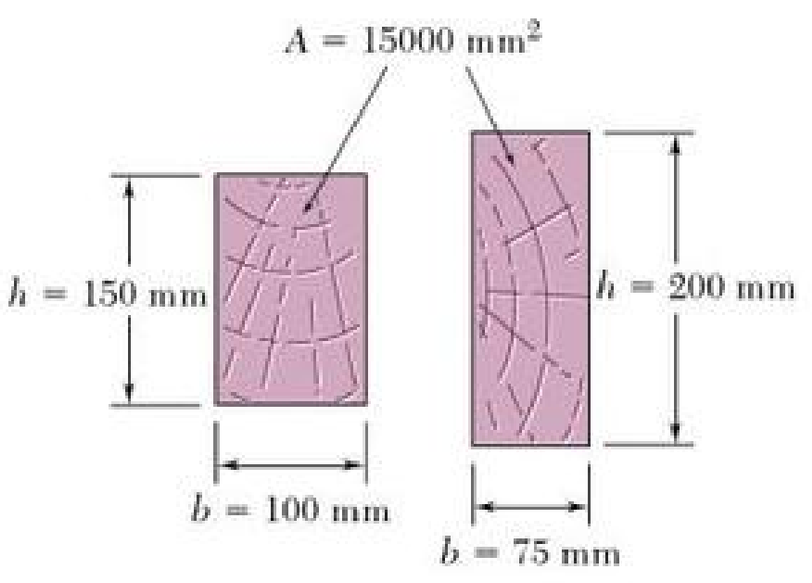


Fig. 4.14

†Lembramos que o momento fletor foi considerado positivo. Se o momento fletor for negativo, M deverá ser substituído na Equação (4.15) por seu valor absoluto $|M|$.

‡No entanto, valores grandes da relação h/b poderiam resultar na instabilidade lateral da viga.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

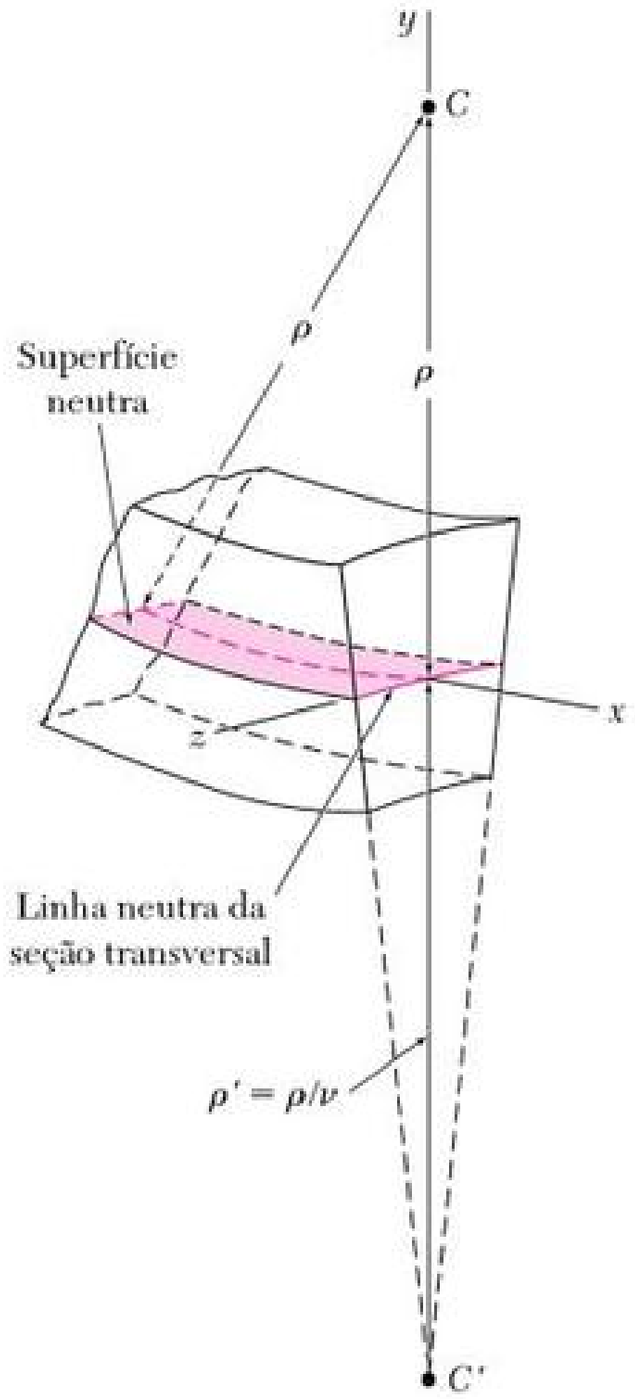


Fig. 4.21

aplicando-se os momentos fletores **M** e **M′** à viga por meio do uso de placas rígidas e planas (Fig. 4.22). As forças elementares exercidas pelas placas sobre a viga serão normais às seções das extremidades, e essas seções, enquanto permanecem planas, estarão livres para se deformar conforme descrito anteriormente nesta seção.

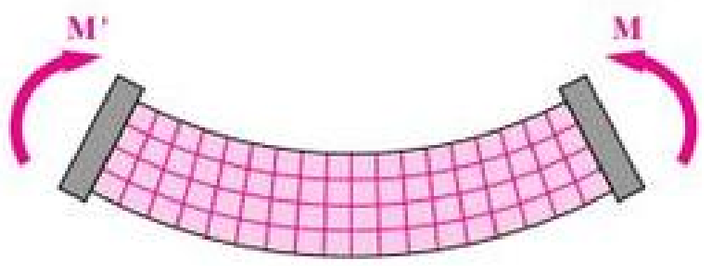


Fig. 4.22

Devemos notar que essas condições de carregamento não podem ocorrer na prática, pois requerem que cada placa exerça forças de tração na seção da extremidade correspondente abaixo de sua linha neutra, ao mesmo tempo em que permite que a seção se deforme livremente em seu próprio plano. No entanto, o fato de que o modelo de placas de extremidades rígidas da Fig. 4.22 não pode ser realizado fisicamente não diminui sua importância, que é a de nos permitir *visualizar* as condições de carregamento que correspondem às relações deduzidas nas seções anteriores. As condições reais de carregamento podem diferir muito desse modelo ideal. No entanto, em virtude do princípio de Saint-Venant, as relações obtidas podem ser usadas para calcular tensões em situações de engenharia, desde que a seção considerada não esteja muito perto dos pontos em que são aplicados os momentos fletores.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.7 até 4.9 Duas forças verticais são aplicadas à viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine as tensões de tração e de compressão máximas na parte *BC* da viga.

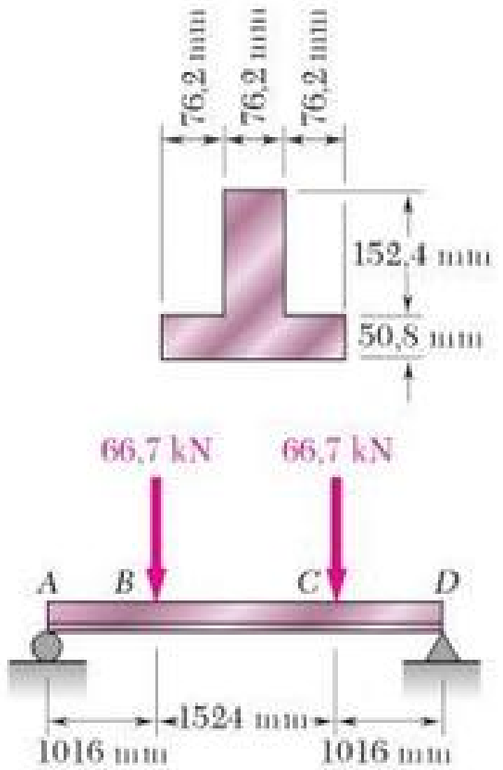


Fig. P4.7

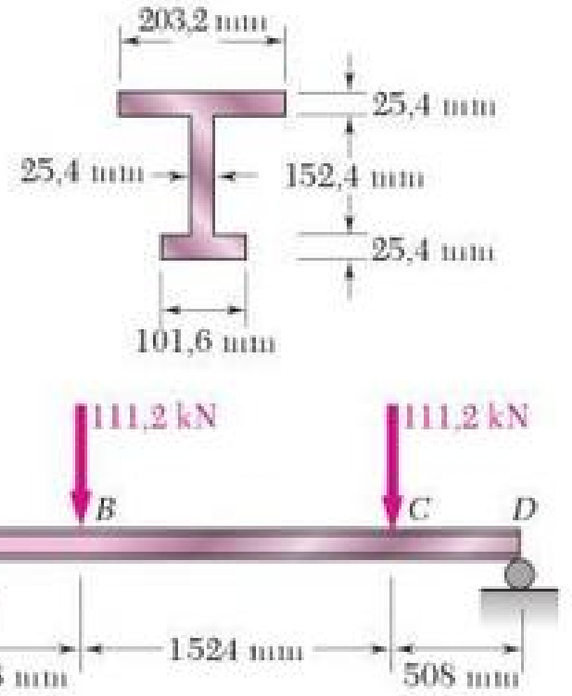
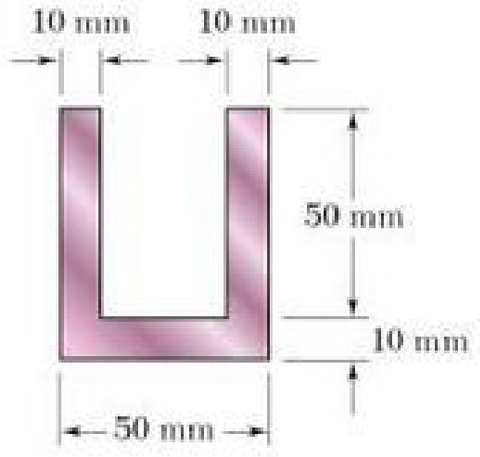


Fig. *P4.8*



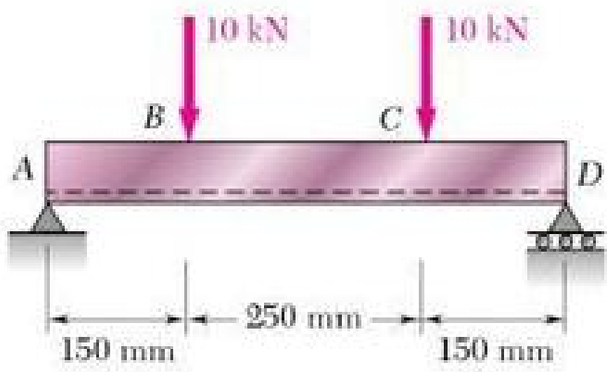


Fig. P4.9

4.10 Dois momentos fletores iguais e opostos de intensidade $M = 25$ kN · m são aplicados à viga *AB* constituída de um perfil U. Observando que fazem a viga flexionar em um plano horizontal, determine a tensão no (*a*) ponto *C*, (*b*) ponto *D* e (*c*) ponto *E*.

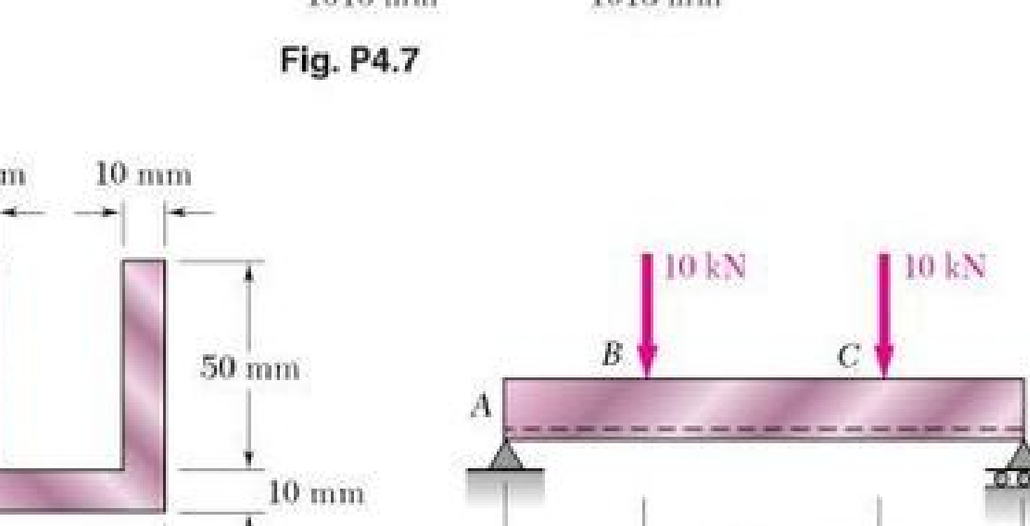


Fig. *P4.10*

4.11 Sabendo que uma viga com a seção transversal mostrada na figura é flexionada em torno do eixo horizontal e que o momento fletor é de 903,8 kN · mm, determine a força total que atua na parte sombreada da viga.

4.12 Resolva o Problema 4.11, considerando que a viga seja flexionada em torno do eixo vertical e que o momento fletor seja de 903,8 kN · mm.

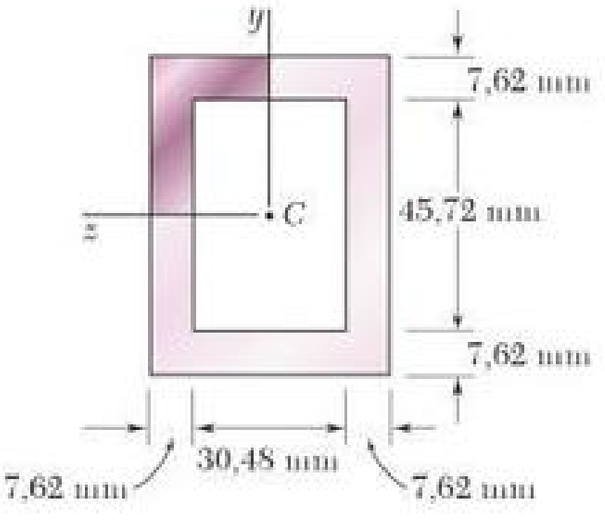


Fig. P4.11

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.28 No Problema 4.27, determine (*a*) o valor de *h* para o qual a tensão máxima σ_m é a menor possível e (*b*) o valor correspondente de *k*.

4.29 Uma viga de aço laminado W200 × 31,3 está submetida a um momento fletor **M** igual a 45 kN · m. Sabendo que $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$, determine (*a*) o raio de curvatura ρ e (*b*) o raio de curvatura ρ' da seção transversal.

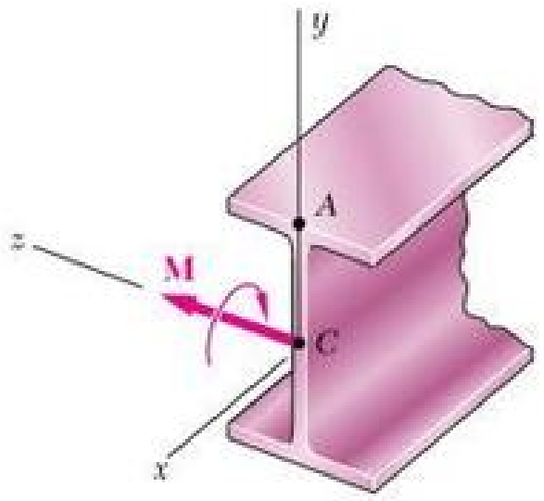


Fig. P4.29

4.30 Para a barra e o carregamento do Exemplo 4.1, determine (*a*) o raio de curvatura ρ, (*b*) o raio de curvatura ρ' de uma seção transversal e (*c*) o ângulo entre os lados da barra que originalmente eram verticais. Use $E = 200$ GPa e $\nu = 0{,}29$.

4.31 Para a barra de alumínio e o carregamento do Problema Resolvido 4.1, determine (*a*) o raio de curvatura ρ' da seção transversal e (*b*) o ângulo entre os lados da barra que originalmente eram verticais. Use $E = 73$ GPa e $\nu = 0{,}33$.

4.32 Considerou-se na Seção 4.3 que as tensões normais σ_y em um elemento em flexão pura são desprezíveis. Para um elemento elástico inicialmente reto de seção transversal retangular, (*a*) determine uma expressão aproximada para σ_y em função de *y* e (*b*) mostre que $(\sigma_y)_{máx} = -(c/2\rho)(\sigma_x)_{máx}$ e, portanto, que σ_y pode ser desprezado em todas as situações práticas. (*Sugestão:* considere o diagrama de corpo livre da parte da viga localizada abaixo da superfície de ordenada *y* e suponha que a distribuição de tensões σ_x ainda seja linear.)

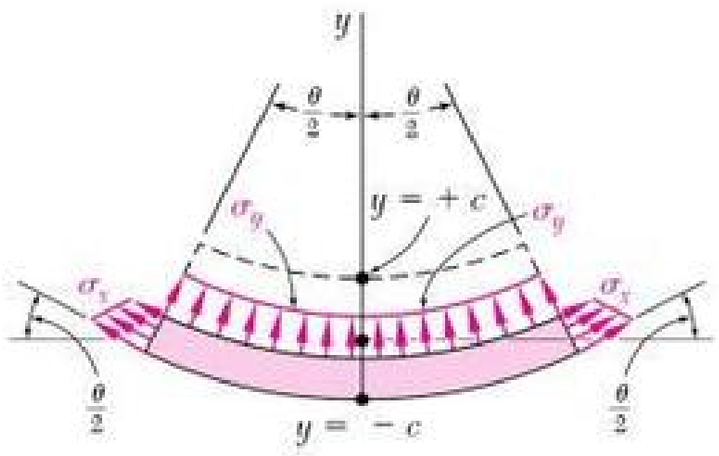


Fig. P4.32

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Um exemplo importante de elementos estruturais constituídos de dois materiais diferentes é encontrado em *vigas de concreto reforçado* (Fig. 4.29). Essas vigas, quando submetidas a momentos fletores positivos, são reforçadas por barras de aço colocadas à pequena distância da face inferior (Fig. 4.30*a*). Como o concreto tem baixa resistência à tração, ele trincará abaixo da superfície neutra e as barras de aço suportarão toda a força de tração, enquanto a parte superior da viga de concreto suportará o esforço de compressão.

Fig. 4.29

Para obtermos a seção transformada de uma viga de concreto reforçado, substituímos a área total da seção transversal A_a das barras de aço por uma área equivalente nA_a, em que n é a relação E_a/E_c entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto (Fig. 4.30*b*). Em contrapartida, como o concreto na viga atua efetivamente somente em compressão, apenas a parte da seção transversal localizada acima da linha neutra deverá ser usada na seção transformada.

A posição da linha neutra é obtida determinando-se a distância x da face superior da viga até o centroide C da seção transformada. Chamando de b a largura da viga, e de d a distância da face superior até a linha de centro das barras de aço, escrevemos que o momento estático da seção transformada

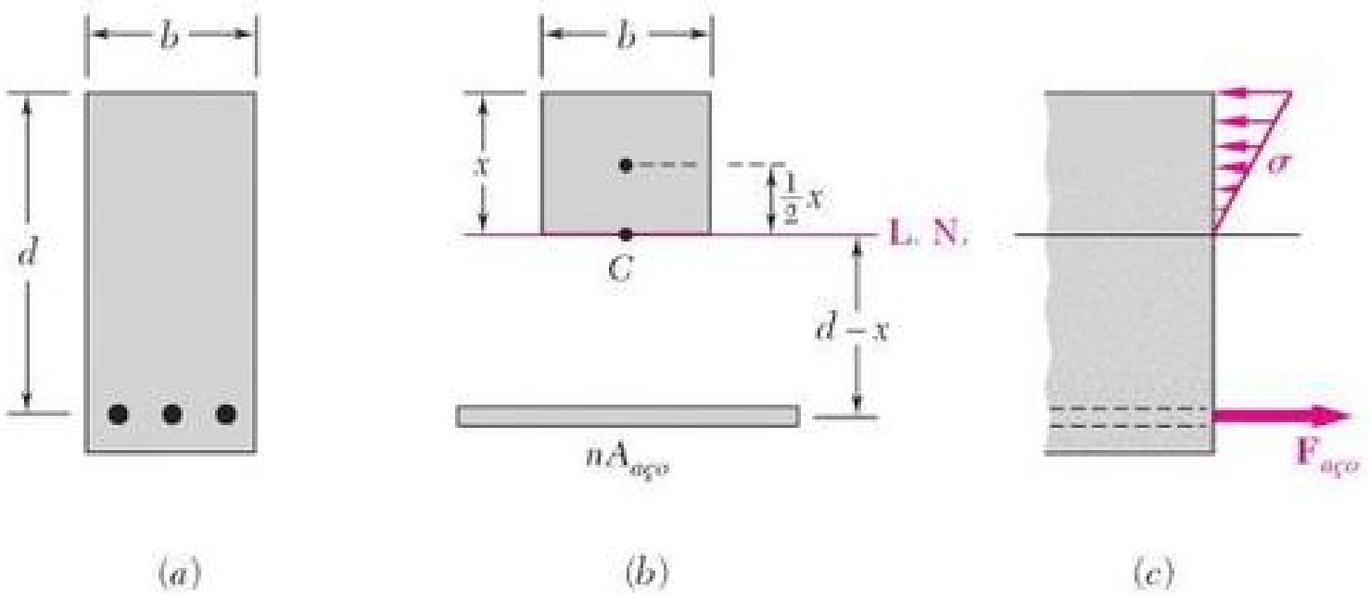


Fig. 4.30

com relação à sua linha neutra deve ser zero. Como o momento estático de cada uma das duas partes da seção transformada é obtido multiplicando-se sua área pela distância de seu próprio centroide até a linha neutra, temos

$$(bx)\frac{x}{2} - nA_{aço}(d - x) = 0$$

ou

$$\frac{1}{2}bx^2 + nA_{aço}x - nA_{aço}d = 0 \tag{4.28}$$

Resolvendo essa equação do segundo grau para x, obtemos a posição da linha neutra da viga, e a parte da seção transversal da viga de concreto que é efetivamente usada.

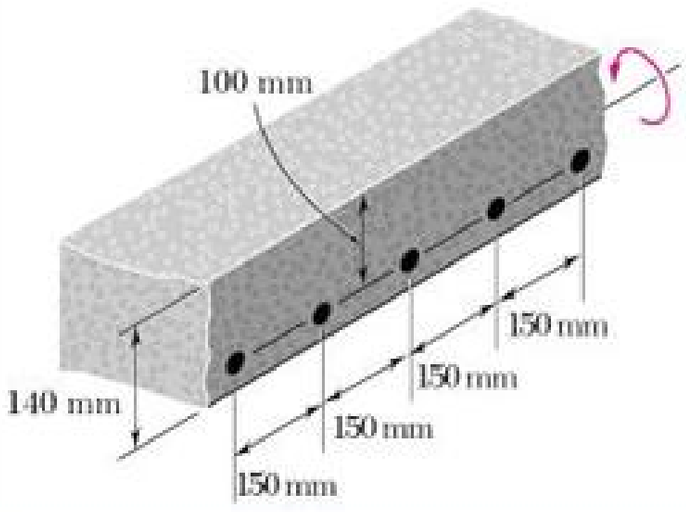
A determinação das tensões na seção transformada é feita conforme explicado anteriormente nesta seção (veja o Problema Resolvido 4.4). A distribuição das tensões de compressão no concreto e a resultante $F_{aço}$ das forças de tração nas barras de aço são mostradas na Fig. 4.30*c*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMA RESOLVIDO 4.4

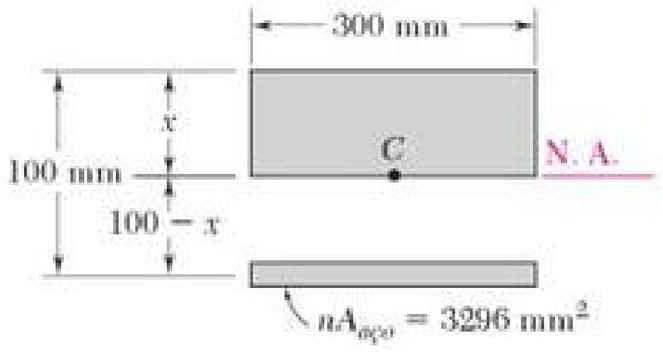


Uma laje de piso de concreto é reforçada por barras de aço de 16 mm de diâmetro colocadas 38 mm acima da face inferior da laje, com 150 mm de espaço entre seus centros. O módulo de elasticidade é de 25 GPa para o concreto usado e de 205 GPa para o aço. Sabendo que é aplicado um momento fletor de 4,5 kN · m a cada 300 mm de largura da laje, determine (*a*) a tensão máxima no concreto e (*b*) a tensão no aço.

SOLUÇÃO

Seção transformada. Consideramos uma parte da laje de 300 mm de largura, sob a qual há duas barras de 16 mm de diâmetro com uma área de seção transversal total de

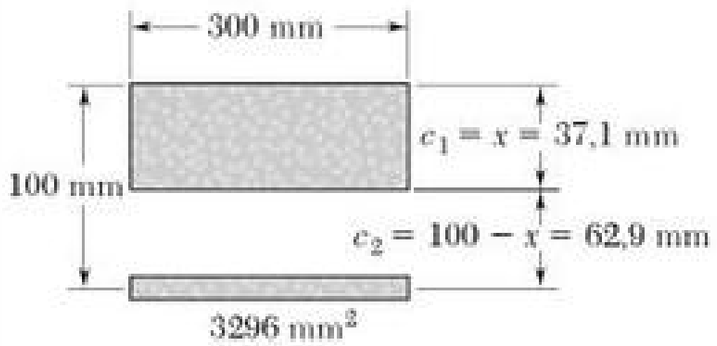
$$A_{aço} = 2\left[\frac{\pi}{4}(16\text{ mm})^2\right] = 402\text{ mm}^2$$



Como o concreto resiste somente em compressão, todas as forças de tração são suportadas pelas barras de aço, e a seção transformada consiste em duas áreas mostradas. Uma é a parte do concreto em compressão (localizada acima da linha neutra), e a outra é a área transformada do aço, $nA_{aço}$. Temos

$$n = \frac{E_{aço}}{E_{conc}} = \frac{205\text{ GPa}}{25\text{ GPa}} = 8{,}2$$

$$nA_{aço} = 8{,}2(402\text{ mm}^2) = 3296\text{ mm}^2$$

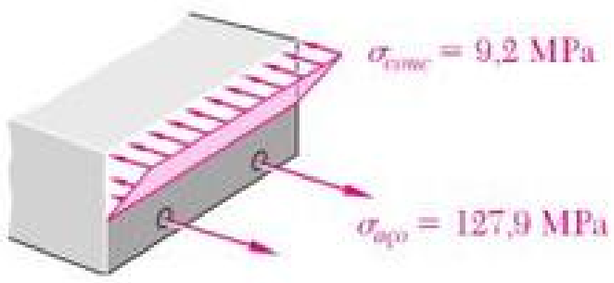


Linha neutra. A linha neutra da laje passa pelo centroide da seção transformada. Somando os momentos da área transformada em relação à linha neutra, escrevemos

$$300x\left(\frac{x}{2}\right) - 3296(100 - x) = 0 \qquad x = 37{,}1\text{ mm}.$$

Momento de inércia. O momento centroidal de inércia da área transformada é

$$I = \tfrac{1}{3}(300)(37{,}1)^3 + 3296(100 - 37{,}1)^2 = 18{,}15 \times 10^6\text{ mm}^4$$



***a*. Tensão máxima no concreto.** Na face superior da laje, temos $c_1 = 37{,}1$ mm e

$$\sigma_{conc} = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4500\text{ kN} \cdot \text{mm})(37{,}1\text{ mm})}{18{,}15 \times 10^6\text{ mm}^4} \qquad \sigma_{conc} = 9{,}2\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

***b*. Tensão no aço.** Para o aço, temos $c_2 = 62{,}9$ mm, $n = 8{,}2$ e

$$\sigma_{aço} = n\frac{Mc_2}{I} = 8{,}2\frac{(4500\text{ kN} \cdot \text{mm})(62{,}9\text{ mm})}{18{,}15 \times 10^6\text{ mm}^4} \qquad \sigma_{aço} = 127{,}9\text{ MPa} \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

4.52 Dizemos que o projeto de uma viga de concreto reforçado está *balanceado* se as tensões máximas do concreto e do aço forem iguais, respectivamente, às tensões admissíveis $\sigma_{aço}$ e σ_{con}. Mostre que, para conseguir um projeto balanceado, a distância x da superfície superior da viga até a linha neutra deve ser

$$x = \frac{d}{1 + \dfrac{\sigma_{aço} E_{conc}}{\sigma_{conc} E_{aço}}}$$

em que E_{con} e $E_{aço}$ são os módulos do concreto e do aço, respectivamente, e d é a distância da superfície superior da viga até o reforço de aço.

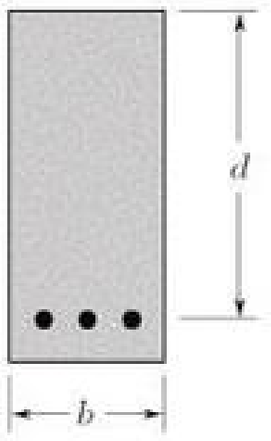


Fig. P4.52

4.53 Para a viga de concreto mostrada na figura, o módulo de elasticidade é de 25 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Sabendo que $b = 200$ mm e $d = 450$ mm e usando a tensão admissível de 12,5 MPa para o concreto e 140 MPa para o aço, determine (*a*) a área $A_{aço}$ necessária do reforço de aço considerando que a viga deve ser balanceada e (*b*) o maior momento fletor admissível. (Veja no Problema 4.52 a definição de viga balanceada.)

4.54 Para a viga de concreto mostrada na figura, o módulo de elasticidade é de 24 GPa para o concreto e de 200 GPa para o aço. Sabendo que $b = 203{,}2$ mm e $d = 558{,}8$ mm, e usando a tensão admissível de 12,4 MPa para o concreto e de 137,9 MPa para o aço, determine (*a*) a área $A_{aço}$ necessária do reforço de aço visto que a viga deve ser balanceada e (*b*) o maior momento fletor admissível. (Veja no Problema 4.52 a definição de viga balanceada.)

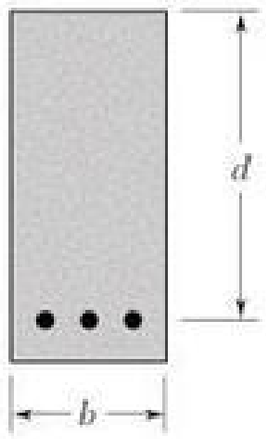


Fig. P4.53 e *P4.54*

4.55 e 4.56 Cinco tiras de metal, cada uma com 15 mm × 45 mm de seção transversal, são unidas para formar uma viga composta, mostrada na figura. O módulo de elasticidade é de 210 GPa para o aço, de 105 GPa para o latão e de 70 GPa para o alumínio. Sabendo que a viga é flexionada em torno do eixo horizontal por um momento de 1400 N · m, determine (*a*) a tensão máxima em cada um dos três metais e (*b*) o raio de curvatura da viga composta.

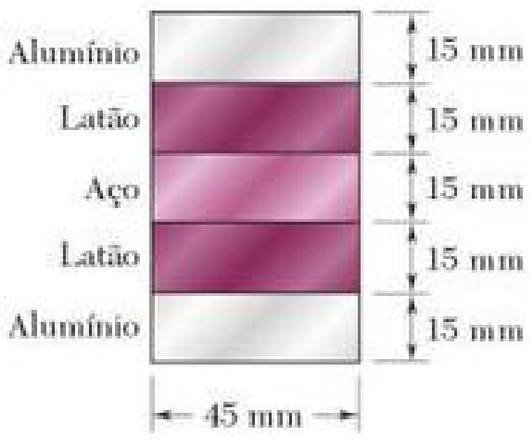


Fig. P4.55

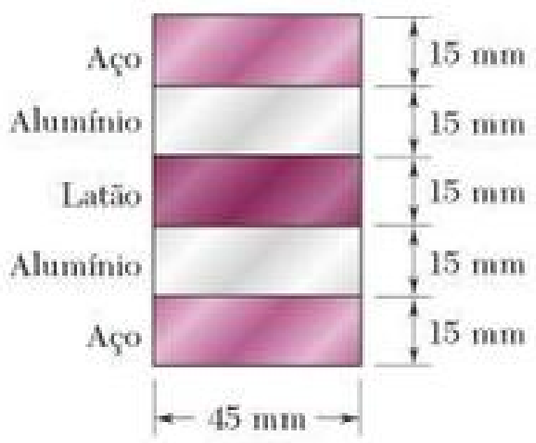


Fig. P4.56

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

em que σ_x é a função de y representada na Fig. 4.36. Como σ_x é uma função ímpar de y, podemos escrever a Equação (4.30) na forma alternativa

$$M = -2b \int_0^c y\sigma_x \, dy \tag{4.31}$$

Se σ_x for uma função analítica conhecida de ϵ_x, a Equação (4.10) pode ser usada para expressar σ_x em função de y, e a integral em (4.31) pode ser determinada analiticamente. No entanto, o momento fletor M pode ser obtido por meio de uma integração numérica. Esse cálculo torna-se mais significativo se notarmos que a integral na Equação (4.31) representa o momento de primeira ordem, em relação ao eixo horizontal, da área na Fig. 4.36 que está localizada acima desse eixo e está limitada pela curva de distribuição de tensões e pelo eixo vertical.

Um valor importante do momento fletor é o seu limite M_L que provoca a falha do elemento. Esse valor pode ser determinado pelo limite de resistência σ_L do material escolhendo $\sigma_{máx} = \sigma_L$ e executando os cálculos indicados anteriormente. No entanto, considera-se mais conveniente na prática determinar M_L experimentalmente para um corpo de prova de um material. Considerando uma distribuição linear fictícia de tensões, a Equação (4.15) é usada então para determinar a tensão máxima correspondente R_B:

$$R_B = \frac{M_L c}{I} \tag{4.32}$$

A tensão fictícia R_B é chamada de *módulo de ruptura em flexão* do material dado. Esse módulo de ruptura pode ser usado para determinar o limite de momento fletor M_L de um componente feito do mesmo material e com uma

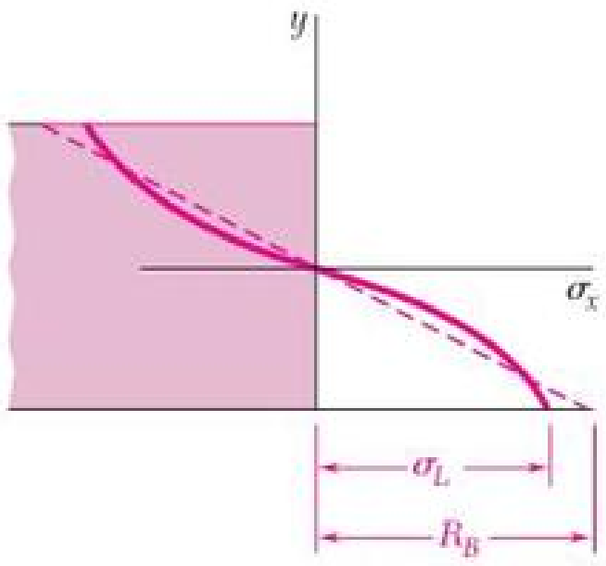


Fig. 4.37

seção transversal da mesma forma, mas de dimensões diferentes, resolvendo a Equação (4.32) para M_L. Uma vez que, no caso de um componente com seção transversal retangular, as distribuições lineares de tensão, reais e fictícias, mostradas na Fig. 4.37 devem dar o mesmo valor M_L para o limite de momento fletor, as áreas que elas definem devem ter o mesmo momento de primeira ordem em relação ao eixo horizontal. Está claro, portanto, que o módulo de ruptura R_B será sempre maior que o limite da resistência real σ_L.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Para determinar a localização da superfície neutra na barra e o valor do coeficiente $E\ \Delta\theta/\theta$ usado nas Equações (4.64) e (4.65), lembramos agora que as forças elementares atuando em qualquer seção transversal devem ser estaticamente equivalentes ao momento fletor **M**. Considerando, conforme fizemos na Seção 4.2 para uma barra reta, ou seja, que a soma das forças elementares atuando em uma seção deva ser zero, e que a soma de seus momentos em relação ao eixo z transversal deva ser igual ao momento fletor M, escrevemos as equações

$$\int \sigma_x \, dA = 0 \tag{4.1}$$

e

$$\int (-y\sigma_x \, dA) = M \tag{4.3}$$

Substituindo o valor de σ_x dado por (4.65) na Equação (4.1), escrevemos

$$-\int \frac{E\ \Delta\theta}{\theta} \frac{R - r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R - r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

da qual se conclui que a distância R do centro de curvatura C até a superfície neutra é definida pela relação

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \tag{4.66}$$

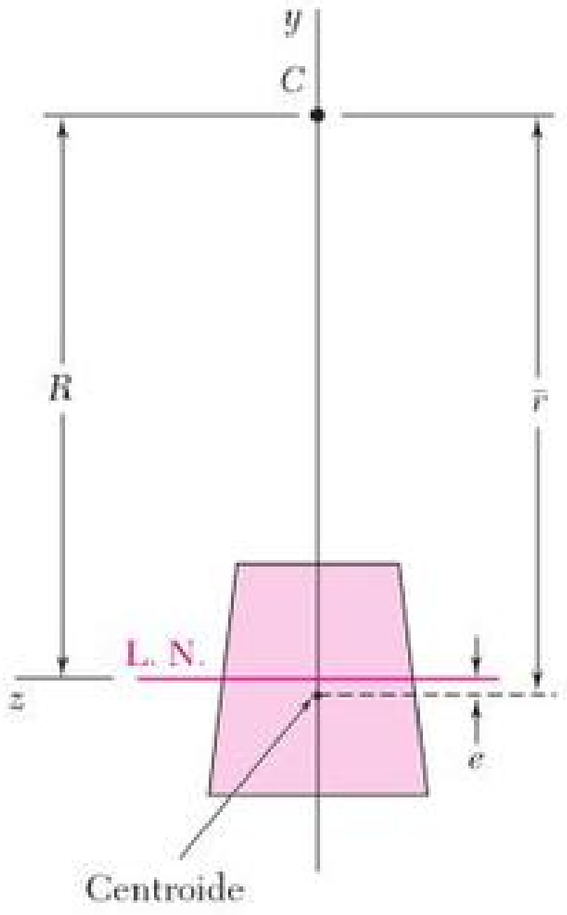


Fig. 4.78

Notamos que o valor obtido para R não é igual à distância $\bar{r}$ de C até o centroide da seção transversal, pois $\bar{r}$ é definido por uma relação diferente, a saber,

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r \, dA \tag{4.67}$$

Concluímos então que, em uma barra curva, *a linha neutra de uma seção transversal não passa pelo centroide daquela seção* (Fig. 4.78).† No Exemplo 4.10 e nos Problemas 4.207 a 4.209, deduziremos expressões para o raio R da superfície neutra para algumas formas específicas de seção transversal. Por conveniência, essas expressões são mostradas na Fig. 4.79.

†No entanto, uma propriedade interessante da superfície neutra pode ser notada se escrevermos a Equação (4.66) em uma forma alternativa

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} dA \tag{4.66'}$$

A Equação (4.66′) mostra que, se a barra é dividida em um grande número de fibras com seção transversal de área dA, a curvatura $1/R$ da superfície neutra será igual ao valor médio da curvatura $1/r$ das várias fibras.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

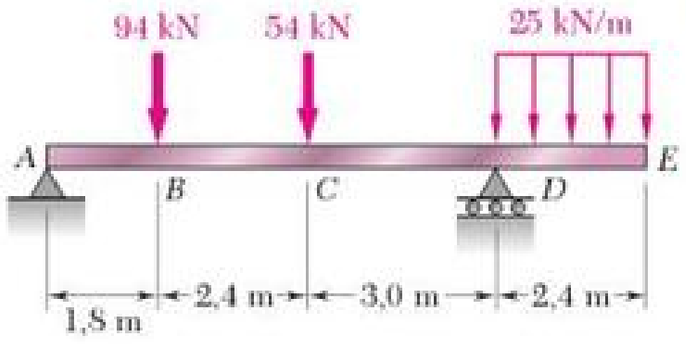
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

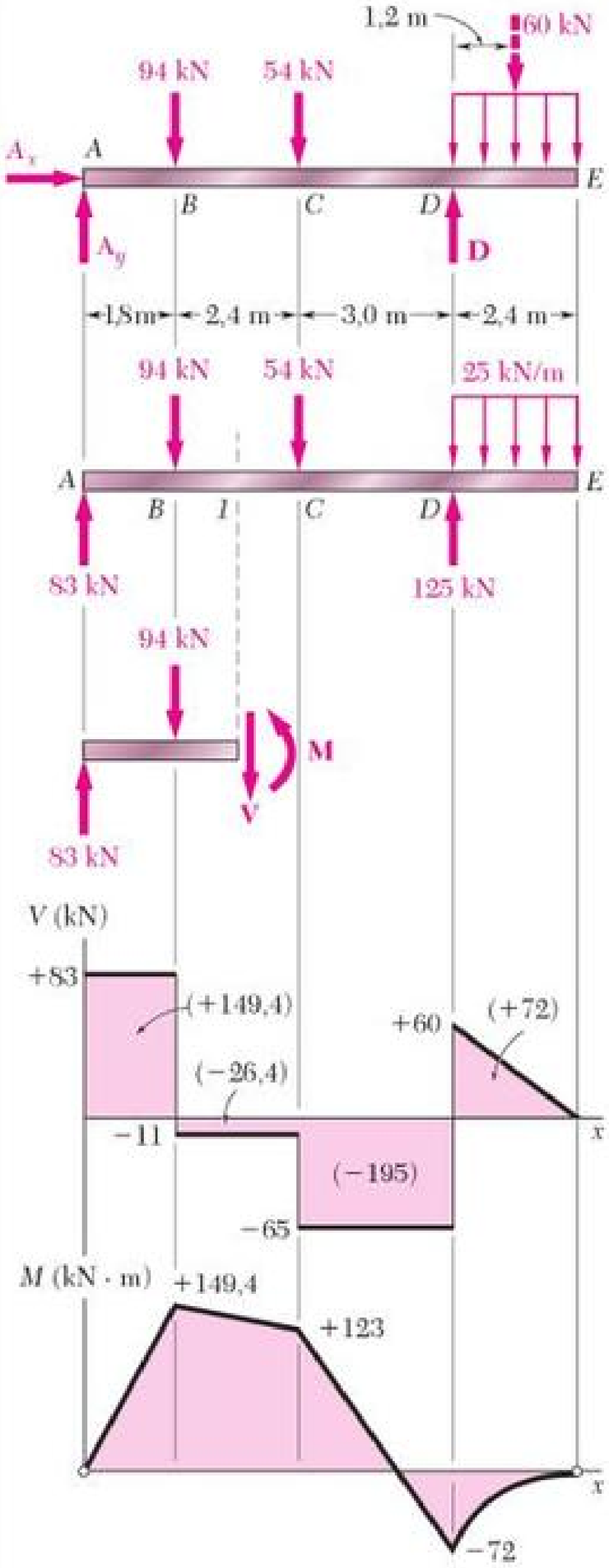
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 5.3

Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento mostrados.

SOLUÇÃO



Reações. Considerando a viga inteira como um corpo livre, escrevemos

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:

$$D(7{,}2\text{ m}) - (94\text{ kN})(1{,}8\text{ m}) - (54\text{ kN})(4{,}2\text{ m}) - (60\text{ kN})(8{,}4\text{ m}) = 0$$

$$D = +125\text{ kN} \qquad \mathbf{D} = 125\text{ kN}$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad A_y - 94\text{ kN} - 54\text{ kN} + 125\text{ kN} - 60\text{ kN} = 0$

$$A_y = +83\text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 83\text{ kN}\uparrow$$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0$: $\quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$

Notamos também que os momentos fletores em A e E são ambos iguais a zero; assim obtemos dois pontos (indicados por um ponto) no diagrama de momento fletor.

Diagrama de força cortante. Como $dV/dx = -w$, sabemos que, entre as forças e as reações concentradas, a inclinação do diagrama da força cortante é zero (isto é, a força cortante é constante). A força cortante em qualquer ponto é determinada dividindo-se a viga em duas partes e considerando cada parte como um corpo livre. Por exemplo, usando a parte da viga à esquerda da seção 1, obtemos o valor da força cortante entre B e C:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad +83\text{ kN} - 94\text{ kN} - V = 0 \qquad V = -11\text{ kN}$

Verificamos também que a força cortante é +60 kN imediatamente à direita de D e zero na extremidade E. Como a inclinação $dV/dx = -w$ é constante entre D e E, o diagrama da força cortante entre esses dois pontos é uma linha reta.

Diagrama do momento fletor. Lembramos que a área sob a curva da força cortante entre dois pontos é igual à variação no momento fletor entre esses dois pontos. Por conveniência, a área de cada parte do diagrama da força cortante é calculada e indicada entre parênteses no diagrama. Como se sabe que o momento fletor M_A na extremidade esquerda é igual a zero, escrevemos

$$M_B - M_A = +149{,}4 \qquad M_B = +149{,}4\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -26{,}4 \qquad M_C = +\ 123{,}0\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D - M_C = -195 \qquad M_D = -\ 72{,}0\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E - M_D = +72 \qquad M_E = 0$$

Como se sabe que M_E é zero, está feita a verificação dos cálculos.

Entre as forças e reações concentradas, a força cortante é constante; portanto, a inclinação dM/dx é constante e o diagrama de momento fletor é traçado ligando-se os pontos conhecidos com linhas retas. Entre D e E, em que o diagrama de força cortante é uma linha reta inclinada, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

Dos diagramas de V e M notamos que $V_{máx} = 83$ kN e $M_{máx} = 149{,}4$ kN · m.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 5.4

Selecione uma viga de mesa larga para suportar uma força de 66 kN, como mostra a Fig. 5.15. A tensão normal admissível para o aço utilizado é de 165 MPa.

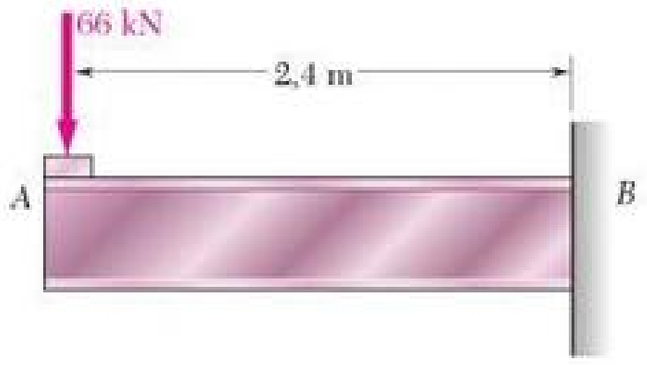


Fig. 5.15

1. A tensão normal admissível é dada: $\sigma_{adm} = 165$ MPa.

2. A força cortante é constante e igual a 66 kN. O momento fletor é máximo em B. Temos

$$|M|_{máx} = (66 \text{ kN})(2{,}4 \text{ m}) = 158{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m} = 158{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. O módulo de resistência da seção mínimo admissível é

$$W_{min} = \frac{|M|_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{158{,}4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{165 \text{ N/mm}^2} = 960 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

4. Consultando a tabela das *Propriedades de Perfis Laminados* no Apêndice C, notamos que os perfis são dispostos em grupos da mesma altura e que, em cada grupo, eles são listados em ordem decrescente de peso. Escolhemos em cada grupo a viga mais leve que tenha um módulo de resistência da seção $W = I/c$ pelo menos tão grande quanto $W_{mín}$, e anotamos os resultados na tabela abaixo.

Perfil	W, mm^3
W530 × 66	1340 × 10
W460 × 74	1460 × 10
W410 × 60	1060 × 10
W360 × 64	1030 × 10
W310 × 74	1060 × 10
W250 × 80	984 × 10

O mais econômico é o perfil de menor peso, ou seja, W410 × 60, com 60 kg/m e, mesmo assim, ele tem um módulo de resistência da seção maior do que dois dos outros perfis. Notamos também que o peso total da viga será (2,4 m) × (60 kg/m × 9,8 m/s^2) = 1411 N. Esse peso é pequeno comparado com a força de 66000 N e pode ser desprezado em nossa análise.

***Projeto com base em fatores de carga e resistência.** Esse método alternativo de projeto foi descrito rapidamente na Seção 1.13 e aplicado a elementos submetidos a carregamento axial. Ele pode ser facilmente aplicado ao projeto de vigas em flexão. Substituindo na Equação (1.26) as cargas P_P, P_E e P_L, respectivamente, pelos momentos de flexão M_P, M_E e M_L, escrevemos

$$\gamma_P M_P + \gamma_E M_E \leq \phi M_L \tag{5.10}$$

Os coeficientes γ_P e γ_E são chamados de *coeficientes de carga* e o coeficiente ϕ é chamado de *coeficiente de resistência*. Os momentos M_P e M_E são os momentos fletores em virtude, respectivamente, das cargas do peso próprio e da carga externa, enquanto M_L é igual ao produto do limite de resistência σ_L do material pelo módulo de resistência à flexão da seção W da viga: $M_L = W\sigma_L$.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

5.71 e 5.72 Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

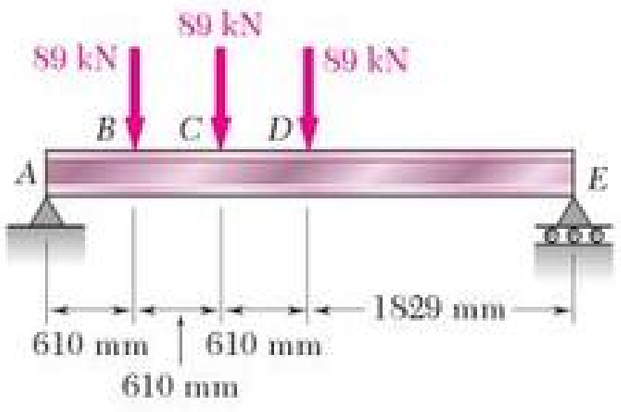


Fig. P5.71

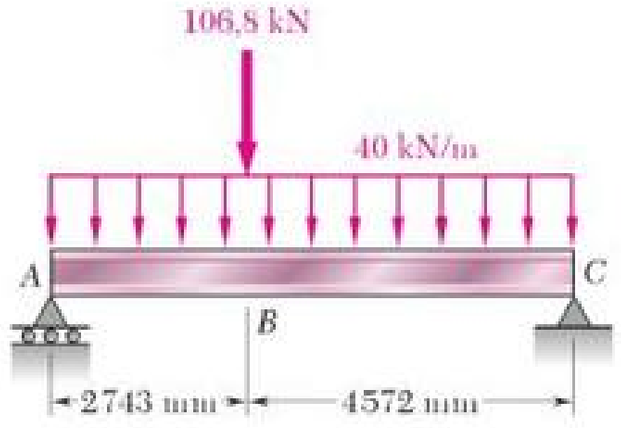


Fig. P5.72

5.73 e 5.74 Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 160 MPa, selecione a viga de mesa larga mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

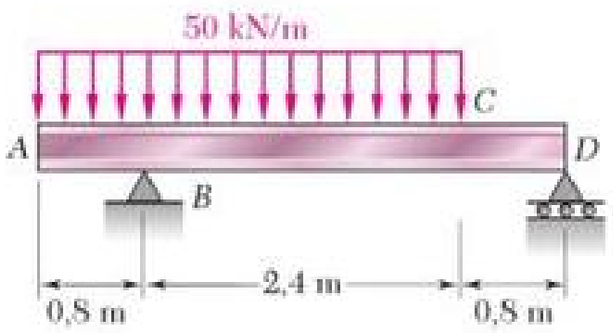


Fig. P5.73

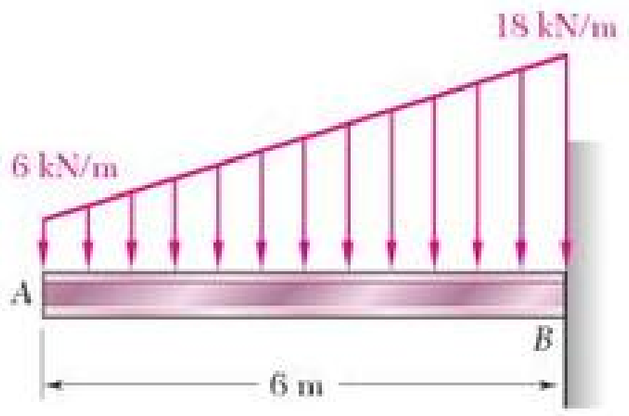


Fig. P5.74

***5.75* e 5.76** Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 165 MPa, selecione a viga I mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

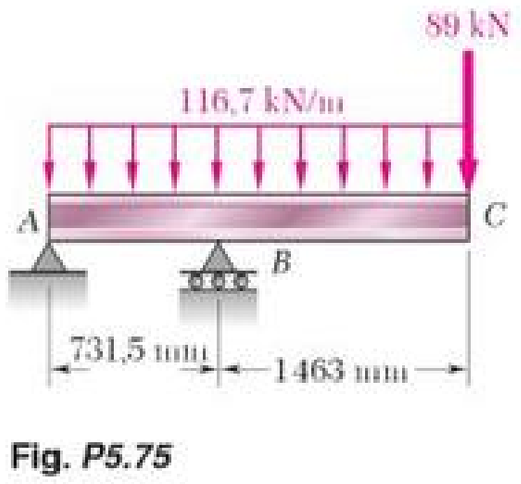


Fig. *P5.75*

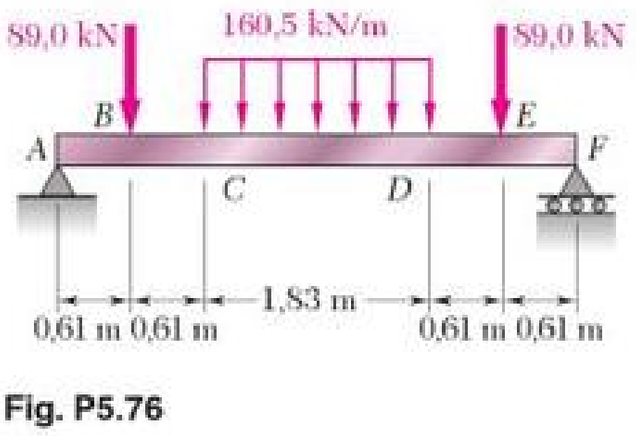


Fig. P5.76

5.77 e *5.78* Sabendo que a tensão admissível para o aço utilizado é de 160 MPa, selecione a viga I mais econômica para suportar o carregamento mostrado.

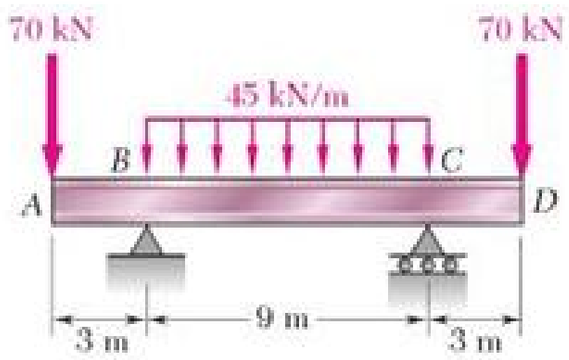


Fig. P5.77

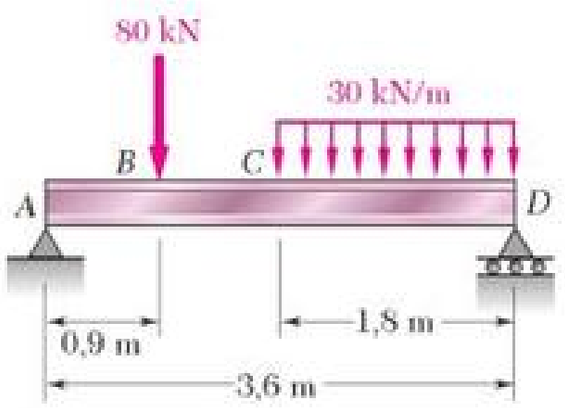


Fig. *P5.78*

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

***5.94** A estrutura de um telhado consiste em madeira compensada e material de forração suportados por várias vigas de madeira de comprimento $L = 16$ m. A carga permanente suportada por cada viga, incluindo seu peso estimado, pode ser representada por uma força uniformemente distribuída $w_P = 350$ N/m. O peso externo consiste em uma carga de neve, representada por uma força uniformemente distribuída $w_E = 600$ N/m e uma força concentrada **P** de 6 kN aplicada ao ponto médio C de cada viga. Sabendo que o limite de resistência da madeira utilizada é $\sigma_L = 50$ MPa e que a largura da viga é $b = 75$ mm, determine a altura mínima admissível h das vigas, usando LRFD com os coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}2$, $\gamma_E = 1{,}6$ e o coeficiente de resistência $\phi = 0{,}9$.

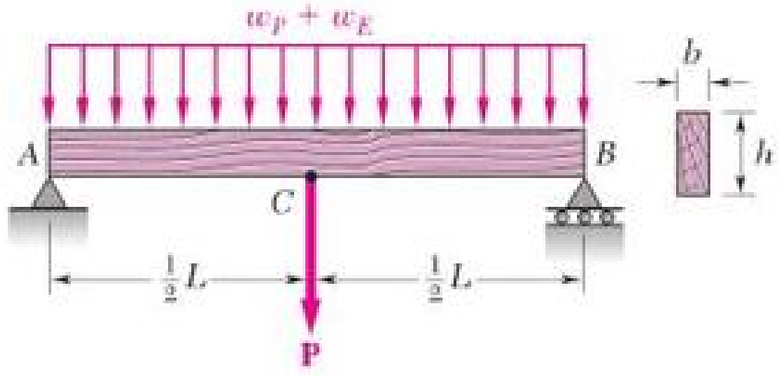


Fig. P5.94

***5.95** Resolva o Problema 5.94 considerando que a força **P** concentrada de 6 kN aplicada a cada viga for substituída por forças concentradas $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ de 3 kN aplicadas a uma distância de 4 m de cada extremidade das vigas.

***5.96** Uma ponte de comprimento $L = 14{,}6$ m deve ser construída em uma estrada secundária cujo acesso a caminhões está limitado a veículos de dois eixos de peso médio. Ela consistirá em uma laje de concreto e vigas de aço simplesmente apoiadas com um limite de resistência $\sigma_L = 413{,}7$ MPa. O peso combinado da laje e das vigas pode ser aproximado por uma força uniformemente distribuída $w = 11$ kN/m em cada viga. Para as finalidades do projeto, considera-se que um caminhão com distância entre eixos de $a = 4{,}27$ m passará pela ponte e que as forças concentradas resultantes $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ exercidas em cada viga serão de até 106,8 kN e 26,7 kN, respectivamente. Determine o perfil de mesas largas mais econômico para as vigas, usando o LRFD com os coeficientes de carga $\gamma_P = 1{,}25$, $\gamma_E = 1{,}75$ e coeficiente de resistência $\phi = 0{,}9$. [*Sugestão*: Pode-se mostrar que o valor máximo de $|M_E|$ ocorre sob a força maior quando a força está localizada à esquerda do centro da viga a uma distância igual a $aP_2/2(P_1 + P_2)$.]

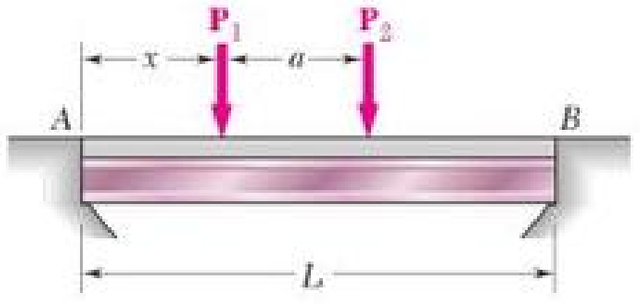


Fig. P5.96

***5.97** Considerando que os eixos dianteiro e traseiro permaneçam na mesma relação do caminhão do Problema 5.94, determine qual caminhão mais pesado poderia passar com segurança sobre a ponte projetada no problema.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

5.98 até 5.100 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações definindo a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor no ponto *C* e verifique a sua resposta desenhando o diagrama de corpo livre da viga inteira.

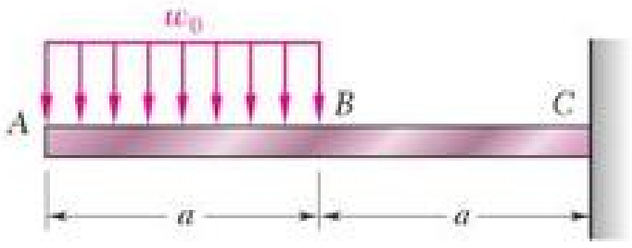


Fig. P5.98

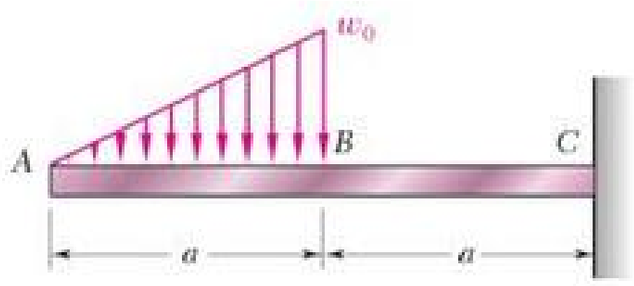


Fig. *P5.99*

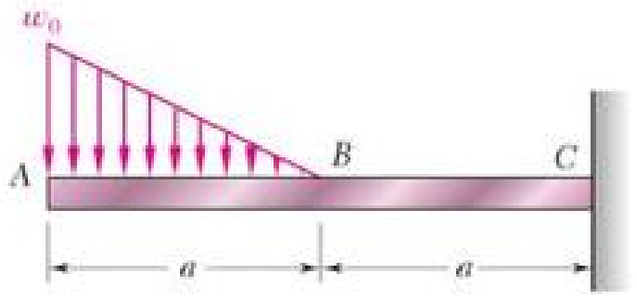


Fig. P5.100

5.101 até *5.103* (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações definindo a força cortante e o momento fletor para a viga e o carregamento mostrados. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor no ponto *E* e verifique a sua resposta desenhando o diagrama de corpo livre da parte da viga à direita de *E*.

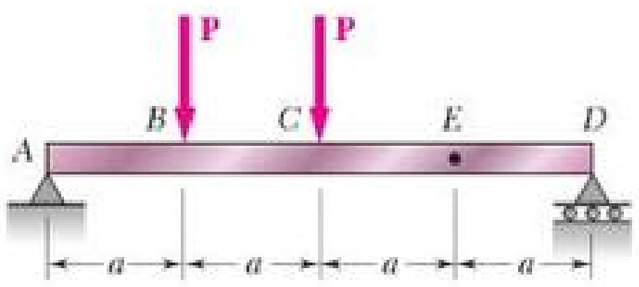


Fig. P5.101

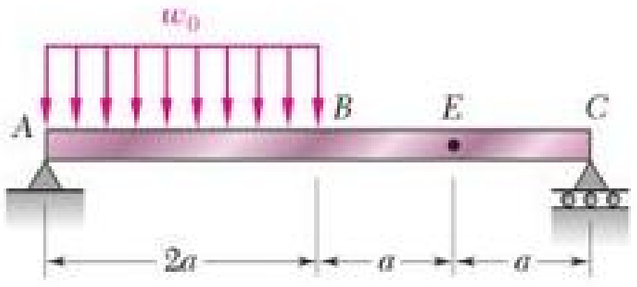


Fig. P5.102

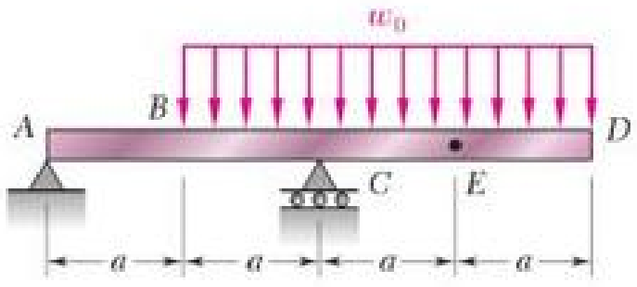


Fig. *P5.103*

5.104 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga *ABC* sob o carregamento mostrado. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor imediatamente à direita do ponto *D*.

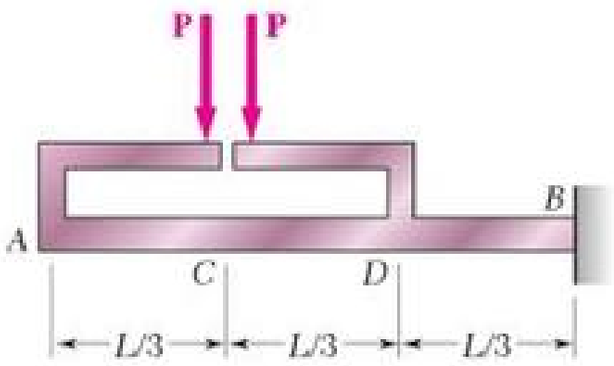


Fig. P5.104

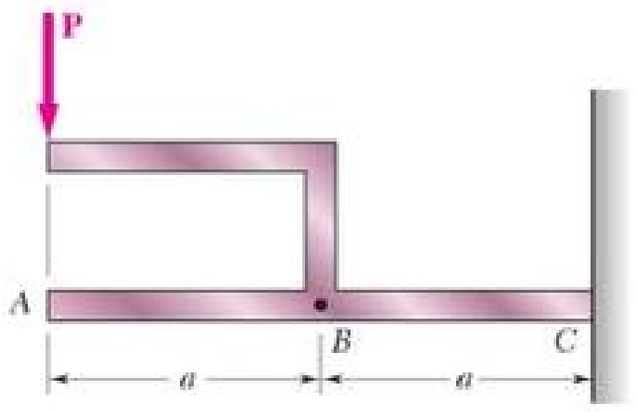


Fig. P5.105

5.105 (*a*) Usando funções de singularidade, escreva as equações para a força cortante e o momento fletor para a viga *ABC* sob o carregamento mostrado. (*b*) Use a equação obtida para *M* para determinar o momento fletor imediatamente à direita do ponto *B*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Fig. 5.22

Para um componente estrutural ou de máquina, forjado ou fundido, é possível variar a seção transversal do componente ao longo de seu comprimento e eliminar grande parte do material desnecessário (ver o Exemplo 5.7). No entanto, para uma viga de madeira ou um perfil de aço laminado, não é possível variar a seção transversal da viga. Contudo, pode-se conseguir consideráveis economias de material, colando pranchas de madeira de comprimentos apropriados a uma viga de madeira (ver o Problema Resolvido 5.11) e usando-se chapas de reforço em partes de uma viga de aço laminado em que o momento fletor é grande (ver o Problema Resolvido 5.12).

EXEMPLO 5.7

Uma placa de alumínio fundido de espessura b deve suportar uma força w uniformemente distribuída, como mostra a Fig. 5.23. (*a*) Determine a forma da placa que resultará no projeto mais econômico. (*b*) Sabendo que a tensão normal admissível para o alumínio utilizado é de 72 MPa e que $b = 40$ mm, $L = 800$ mm e $w = 135$ kN/m, determine a altura h_0 máxima da placa.

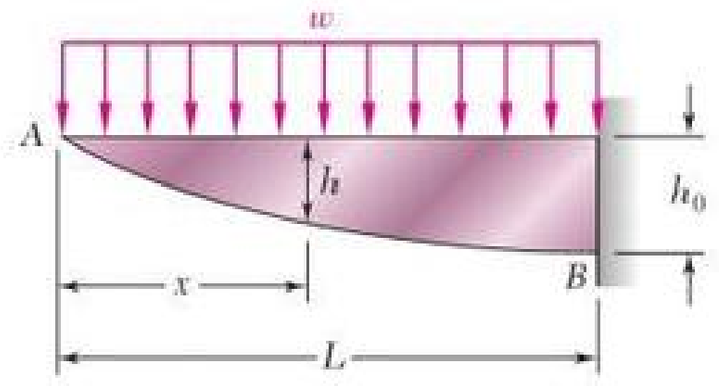


Fig. 5.23

Momento fletor. Medindo a distância x a partir de A e observando que $V_A = M_A = 0$, usamos as Equações (5.6) e (5.8) da Seção 5.3 e escrevemos

$$V(x) = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$M(x) = \int_0^x V(x)\,dx = -\int_0^x wx\,dx = -\tfrac{1}{2}wx^2$$

(a) Forma da placa. Recordamos da Seção 5.4 que o módulo de resistência W de uma seção transversal retangular de largura b e altura h é $W = \frac{1}{6}bh^2$. Usando esse valor na Equação (5.18) e resolvendo para h^2, temos

$$h^2 = \frac{6|M|}{b\sigma_{adm}} \tag{5.19}$$

e, após substituirmos $|M| = \frac{1}{2}wx^2$,

$$h^2 = \frac{3wx^2}{b\sigma_{adm}} \qquad \text{ou} \qquad h = \left(\frac{3w}{b\sigma_{adm}}\right)^{1/2} x \tag{5.20}$$

Como a relação entre h e x é linear, a borda superior da placa é uma linha reta. Assim, a placa que proporciona um projeto mais econômico tem a *forma triangular*.

(b) Altura h_0 máxima. Fazendo $x = L$ na Equação (5.20) e substituindo os dados fornecidos, obtemos

$$h_0 = \left[\frac{3(135\text{ kN/m})}{(0{,}040\text{ m})(72\text{ MPa})}\right]^{1/2}(800\text{ mm}) = 300\text{ mm}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

5.141 Duas placas de reforço, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga W690 × 125, conforme mostra a figura. Sabendo que $l = 3048$ mm e $b = 267$ mm, determine a tensão normal máxima em uma seção transversal (*a*) no do centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de *D*.

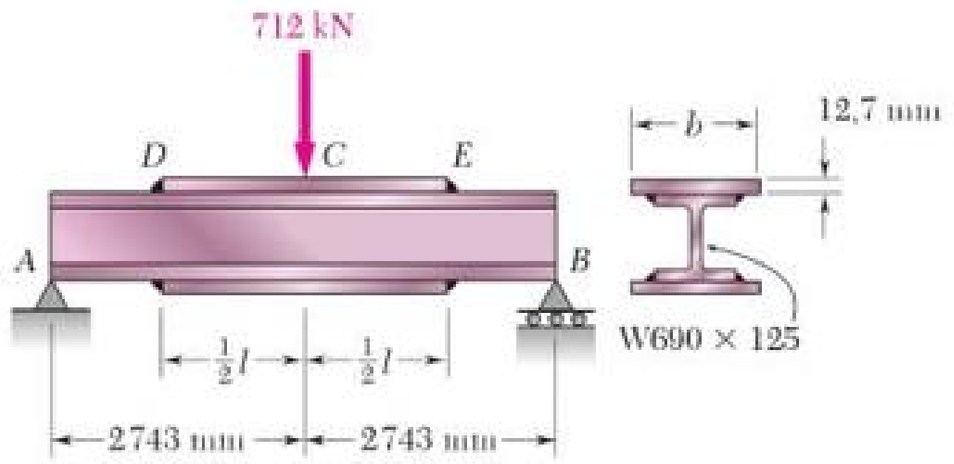


Fig. *P5.141* e P5.142

5.142 Duas placas de reforço, cada uma com 12,7 mm de espessura, são soldadas a uma viga W690 × 125, conforme mostra a figura. Sabendo que $\sigma_{adm} = 165$ MPa para a viga e para as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

5.143 Sabendo que $\sigma_{adm} = 150$ MPa, determine a maior força **P** concentrada que pode ser aplicada na extremidade *E* da viga mostrada.

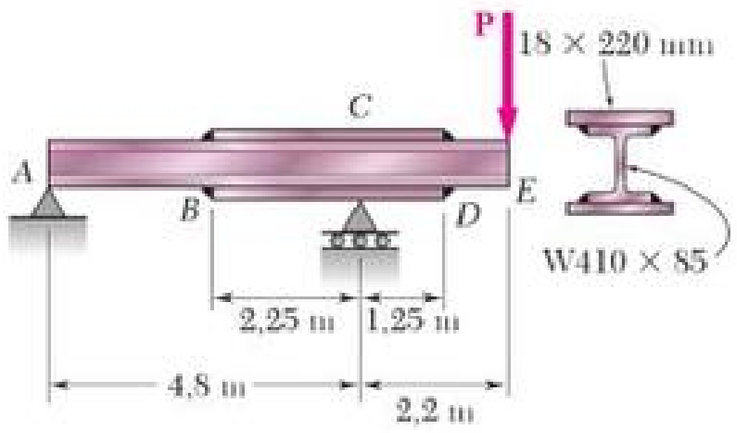


Fig. P5.143

5.144 Duas placas de reforço, cada uma com 7,5 mm de espessura, são soldadas a uma viga W460 × 74, conforme mostra a figura. Sabendo que $l = 5$ m e $b = 200$ mm, determine a tensão normal máxima em uma seção na transversal (*a*) no centro da viga e (*b*) imediatamente à esquerda de *D*.

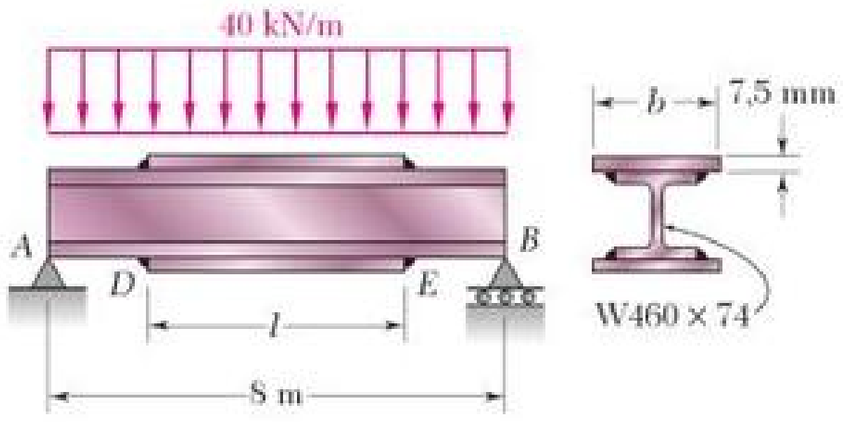


Fig. P5.144 e P5.145

5.145 Duas placas de reforço, cada uma com 7,5 mm de espessura, são soldadas a uma viga W460 × 74, conforme mostra a figura. Sabendo que $\sigma_{adm} = 150$ MPa para a viga e as placas, determine o valor necessário para (*a*) o comprimento das placas e (*b*) a largura das placas.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

C A P Í T U L O

Tensões de cisalhamento em vigas e barras de paredes finas

6

Um tabuleiro de concreto armado será fixado em cada uma das seções de aço mostradas para formar uma ponte de viga caixão de material composto. Neste capítulo, as tensões de cisalhamento serão determinadas em vários tipos de vigas e vigas mestras.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

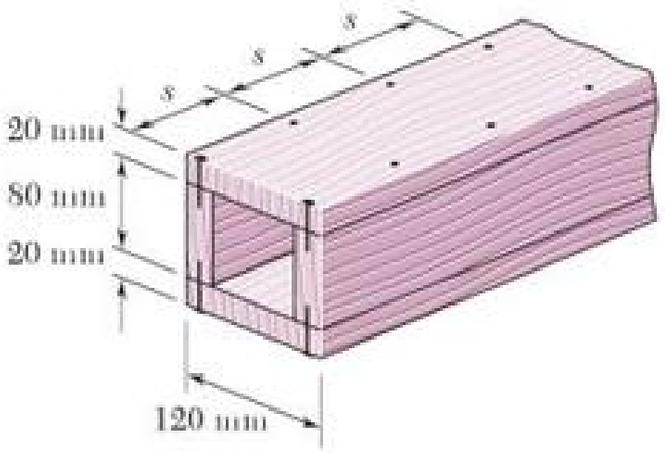


Fig. P6.1 e P6.2

6.1 Uma viga caixão quadrada é feita de duas pranchas de 20 × 80 mm e duas pranchas de 20 × 120 mm pregadas entre si, como mostra a figura. Sabendo que o espaçamento entre os pregos é $s = 50$ mm e que a força cortante admissível em cada prego é de 300 N, determine (*a*) a maior força cortante vertical admissível na viga e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima correspondente.

6.2 Uma viga caixão quadrada é feita de duas pranchas de 20 × 80 mm e duas pranchas de 20 × 120 mm pregadas entre si, como mostra a figura. Sabendo que o espaçamento entre os pregos é $s = 30$ mm e que a força cortante vertical na viga é $V = 1\,200$N, determine (*a*) a força cortante em cada prego e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga.

6.3 Três tábuas, cada uma com 50,8 mm de espessura, são pregadas entre si para formar uma viga que está submetida a uma força cortante vertical. Sabendo que a força cortante admissível em cada prego é de 667 N, determine a força cortante admissível se o espaçamento *s* entre os pregos for de 76,2 mm.

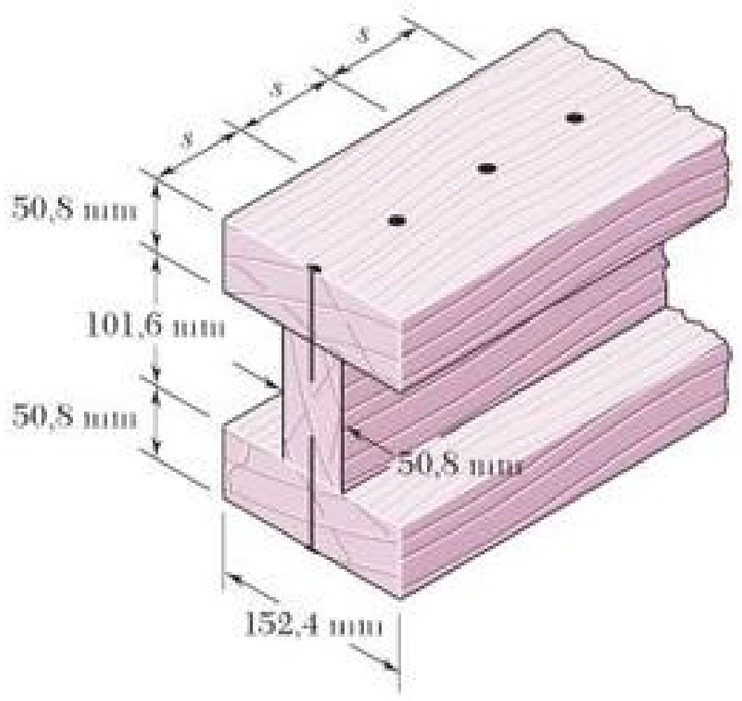


Fig. P6.3 e *P6.4*

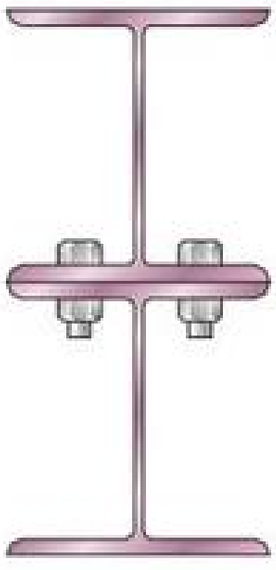


Fig. P6.5

6.4 Três tábuas, cada uma com espessura de 50,8 mm, são pregadas para formar uma viga que está submetida a uma força cortante vertical de 1 334 N. Sabendo que a força cortante admissível em cada prego é de 445 N, determine o maior espaçamento longitudinal *S* entre os pregos que poderá ser utilizado.

6.5 A viga de seção composta mostrada foi fabricada conectando dois perfis laminados W150 × 29,8 por meio de parafusos com 15,88 mm de diâmetro colocados longitudinalmente e espaçados em 152,4 mm. Sabendo que a tensão de cisalhamento média admissível para os parafusos é igual a 72,4 MPa, determine a máxima força cortante vertical admissível para essa viga.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

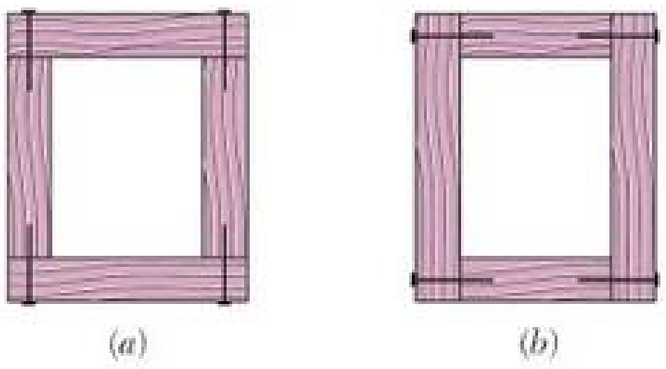


Fig. 6.23

6.6. Cisalhamento longitudinal em um elemento de viga de modo arbitrário

Considere uma viga caixão construída pregando-se quatro tábuas, como mostra a Fig. 6.23*a*. Você aprendeu na Seção 6.2 como determinar a força cortante por unidade de comprimento, q, nas superfícies horizontais ao longo das quais as tábuas são unidas. Mas você seria capaz de determinar q se as tábuas tivessem sido unidas ao longo de superfícies *verticais*, como mostra a Fig. 6.23*b*? Examinamos na Seção 6.4 a distribuição das componentes verticais τ_{xy} das tensões em uma seção transversal de uma viga W ou uma viga I, e vimos que essas tensões tinham um valor razoavelmente constante na alma da viga e eram desprezíveis em suas mesas. Mas, e as componentes *horizontais* τ_{xz} das tensões nas mesas?

Para respondermos a essas questões, devemos retomar o procedimento desenvolvido na Seção 6.2 para a determinação da força cortante por unidade de comprimento, q, de modo que ele se aplique aos casos que acabamos de descrever.

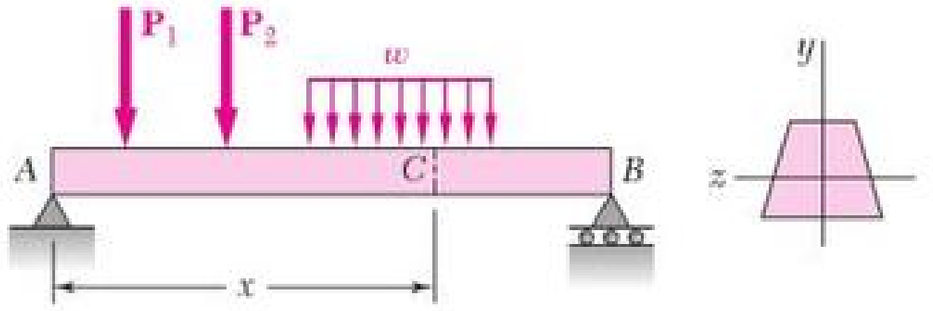


Fig. 6.5 (repetida)

Considere a viga prismática AB da Fig. 6.5, que tem um plano vertical de simetria e suporta as forças mostradas na figura. A uma distância x da extremidade A separamos novamente um elemento $CDD'C'$ de comprimento Δx. Esse elemento, no entanto, se estenderá agora aos dois lados da viga até uma superfície curva arbitrária (Fig. 6.24). As forças exercidas no elemento

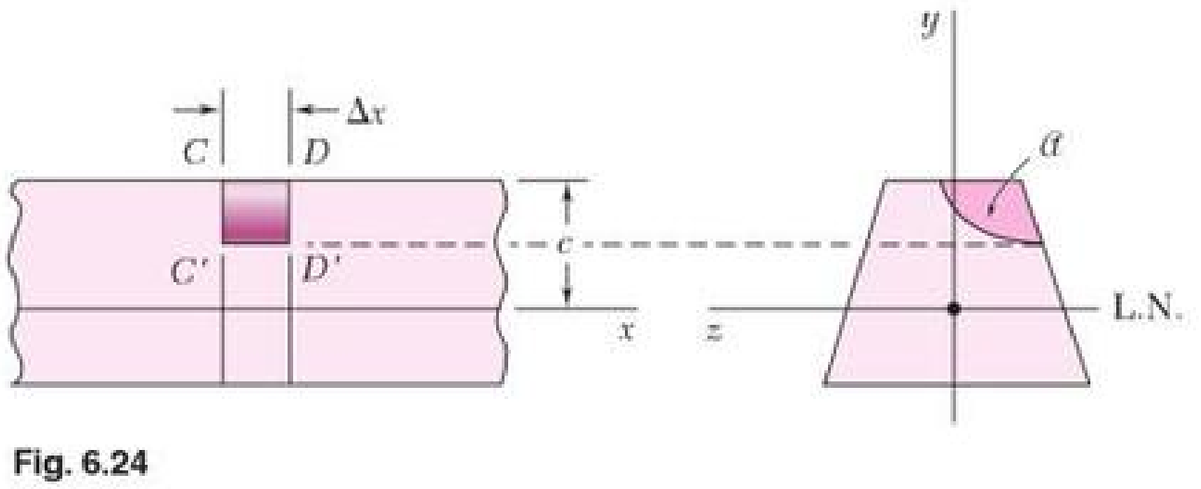


Fig. 6.24

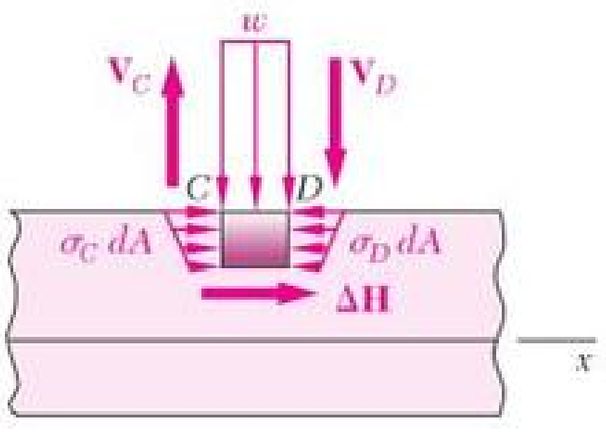


Fig. 6.25

incluem as forças cortantes na direção vertical $\mathbf{V}'_C$ e $\mathbf{V}'_D$, forças normais horizontais elementares $\sigma_C\,dA$ e $\sigma_D\,dA$, possivelmente uma carga $w\,\Delta x$, e uma força cortante longitudinal $\Delta\mathbf{H}$ representando a resultante das forças cortantes longitudinais elementares que atuam na superfície curva (Fig. 6.25). Escrevemos a equação de equilíbrio

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \qquad \Delta H + \int_a (\sigma_D - \sigma_C)\,dA = 0$$

uma vez que a integral deve ser calculada sobre a área sombreada a da seção. Observamos que a equação obtida é a mesma que obtivemos na Seção 6.2,

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

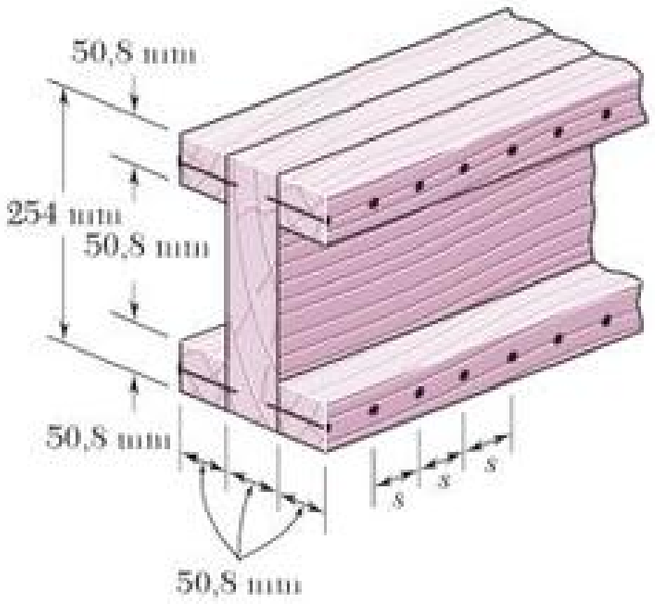


Fig. P6.29

6.29 A viga de madeira mostrada na figura está submetida a uma força cortante vertical de 5,34 kN. Sabendo que a força cortante admissível nos pregos é 333,6 N, determine o maior espaçamento possível s dos pregos.

6.30 Duas placas de madeira compensada de 20 × 100 mm em duas tábuas de 20 × 180 mm são coladas para formar uma viga de seção caixão com 120 × 200 mm. Sabendo que a viga está submetida a uma carga de 3,5 kN, determine a tensão de cisalhamento média admissível nas juntas coladas (a) em A e (b) em B.

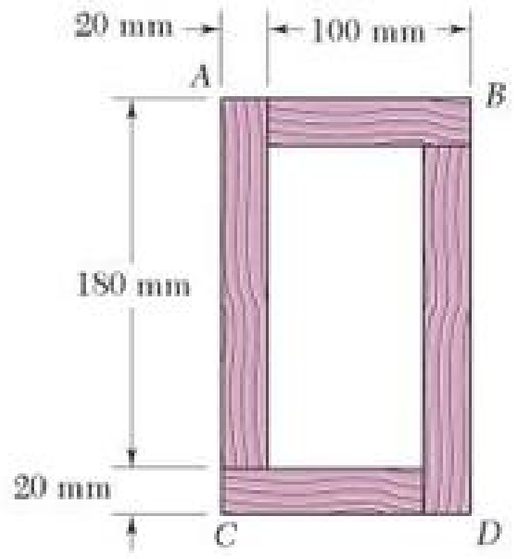


Fig. *P6.30*

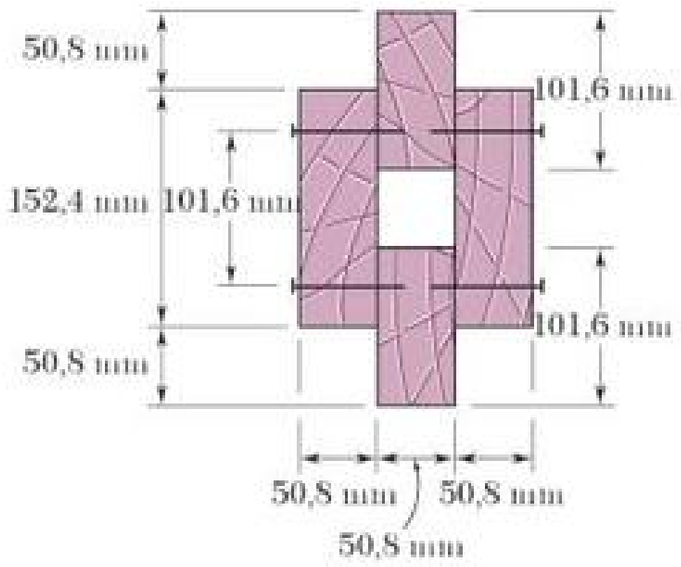


Fig. P6.31

6.31 A viga de madeira mostrada na figura está submetida a uma força cortante vertical de 6,67 kN. Sabendo que o espaçamento longitudinal dos pregos é s = 63,5 mm e que cada prego tem 88,9 mm de comprimento, determine a força cortante em cada um deles.

6.32 A viga mostrada na figura foi feita pregando-se várias tábuas e está sujeita a uma força cortante de 8 kN. Sabendo que os pregos estão espaçados longitudinalmente a cada 60 mm em A e a cada 25 mm em B, determine a tensão de cisalhamento nos pregos (*a*) em A e (*b*) em B. (Dado: $I_x = 1{,}504 \times 10^9$ mm^4.)

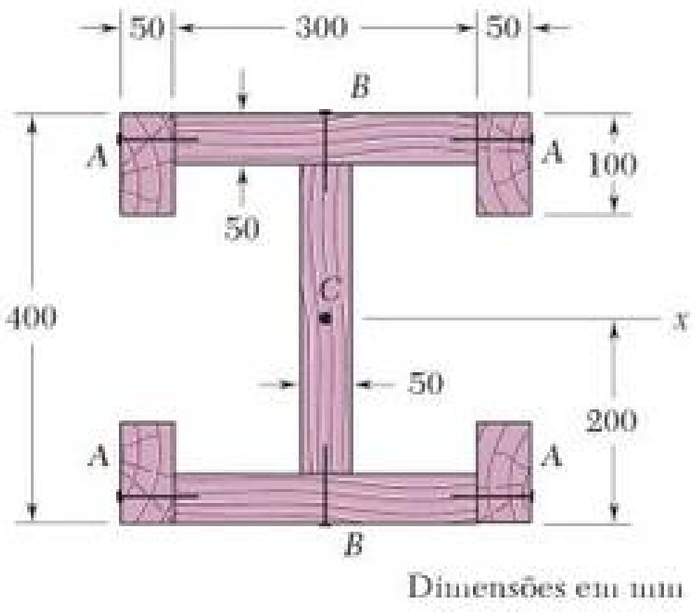


Fig. P6.32

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

6.57 Uma barra de aço e uma barra de alumínio são unidas para formar uma viga composta como mostra a figura. Sabendo que a força cortante vertical na viga é 17,8 kN e que o módulo de elasticidade é 200 GPa para o aço e 73,1 GPa para o alumínio, determine (*a*) a tensão média na superfície de união e (*b*) a tensão de cisalhamento máxima na viga. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

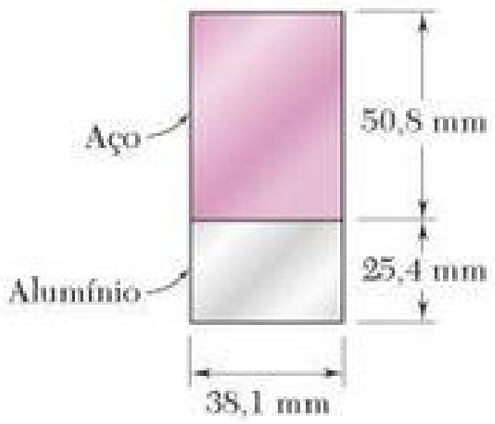


Fig. P6.57

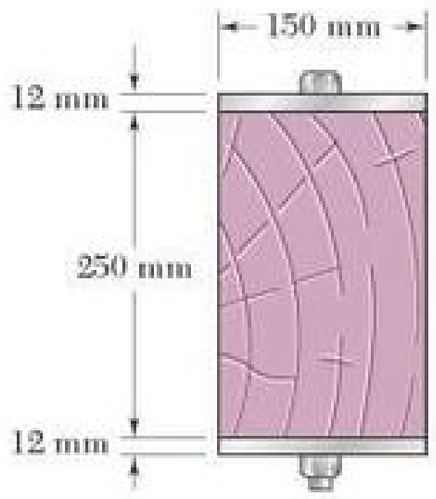


Fig. *P6.58*

6.58 Uma viga composta é feita unindo-se as partes de madeira e aço com parafusos de 12 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 200 mm. O módulo de elasticidade é de 10 GPa para a madeira e 200 GPa para o aço. Para uma força cortante vertical de 4 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média nos parafusos e (*b*) a tensão de cisalhamento no centro da seção transversal. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

6.59 Uma viga composta é feita unindo-se partes de madeira e aço, conforme mostra a figura, por parafusos de 15,88 mm de diâmetro espaçados longitudinalmente a cada 203,2 mm. O módulo de elasticidade é de 13,1 GPa para a madeira e 200 GPa para o aço. Para uma força cortante vertical de 17,79 kN, determine (*a*) a tensão de cisalhamento média nos parafusos e (*b*) a tensão de cisalhamento no centro de seção transversal. (*Sugestão*: Use o método indicado no Problema 6.55.)

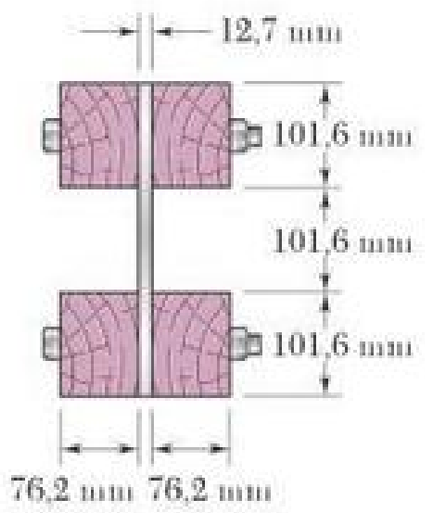


Fig. P6.59

6.60 Considere a viga em balanço *AB* discutida na Seção 6.8, e a parte *ACKJ* da viga que está localizada à esquerda da seção transversal *CC'* e acima do plano horizontal *JK*, em que *K* é um ponto a uma distância $y < y_E$ acima da linha neutra (Fig. 6.60). (*a*) Lembrando que $\sigma_x = \sigma_E$ entre *C* e *E*, e $\sigma_x = (\sigma_E/y_E)y$ entre *E* e *K*, mostre que a intensidade da força cortante horizontal **H** que atua na face inferior da parte da viga *ACKJ* é

$$H = \frac{1}{2} b\sigma_E \left(2c - y_E - \frac{y^2}{y_E}\right)$$

(*b*) Observando que a tensão de cisalhamento em *K* é

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x}$$

e lembrando que y_E é uma função de *x* definida pela Equação (6.14), deduza a Equação (6.15).

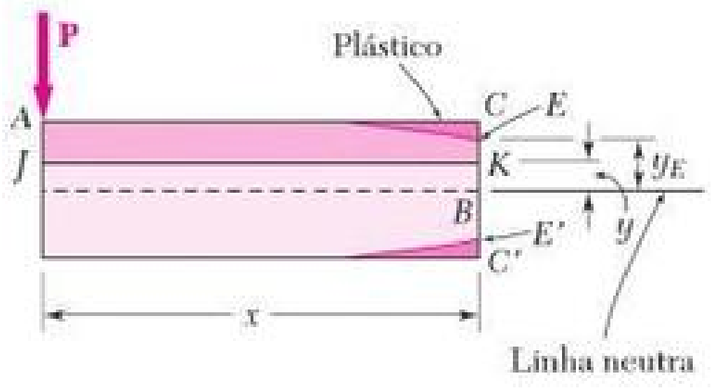


Fig. P6.60

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 6.7

Para a seção em forma de U do Exemplo 6.5, e desprezando as concentrações de tensão, determine a tensão de cisalhamento máxima provocada por uma força cortante vertical **V** de 12 kN aplicada no centroide *C* da seção, que está localizado 28,57 mm à direita da linha de centro da alma *BD* (Fig. 6.56).

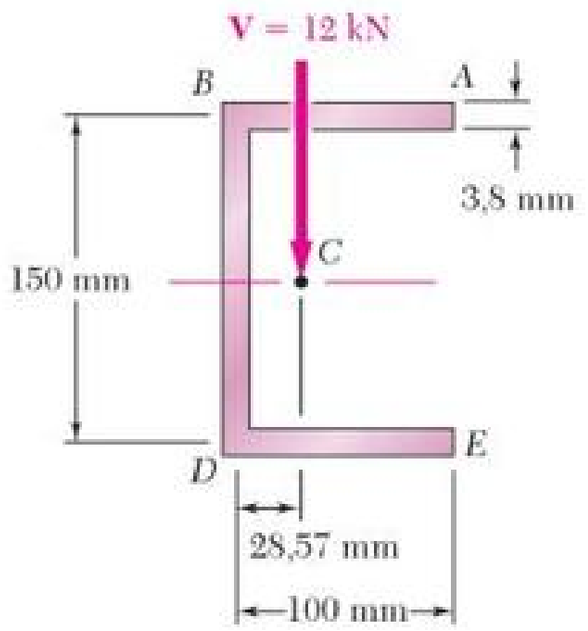


Fig. 6.56

Sistema força-momento equivalente no centro de cisalhamento. O centro de cisalhamento *O* da seção transversal foi determinado no Exemplo 6.5 e sabe-se que está a uma distância $e = 40$ mm à esquerda da linha de centro da alma *BD*. Substituímos a força cortante **V** (Fig. 6.57*a*) por um sistema equivalente constituído de força e momento no centro de cisalhamento *O* (Fig. 6.57*b*). Esse sistema consiste em uma força **V** de 12 kN e um torque **T** de intensidade

$$T = V(OC) = (12 \text{ kN})(40 \text{ mm} + 28{,}57 \text{ mm})$$
$$= 822{,}8 \text{ kN} \cdot \text{mm}$$

Tensões devido à flexão. A força cortante **V** de 12 kN faz a barra curvar-se e a distribuição correspondente de tensões de cisalhamento na seção (Fig. 6.57*c*) foi determinada no Exemplo 6.6. Lembramos que o valor máximo da tensão em razão dessa força era

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{flexão}} = 23{,}2 \text{ MPa}$$

Tensões devido à torção. O torque **T** faz a barra torcer, e a distribuição de tensões correspondente é mostrada na Fig. 6.57*d*. Lembramos da Seção 3.12 que a analogia da membrana mostra que, em uma barra de paredes finas de espessura uniforme, a tensão provocada pelo torque **T** é máxima ao longo da borda da seção. Usando as Equações (3.45) e (3.43) com

$$a = 100 \text{ mm} + 150 \text{ mm} + 100 \text{ mm} = 350 \text{ mm}$$
$$b = t = 3{,}8 \text{ mm} \qquad b/a = 0{,}0109$$

temos

$$c_1 = \tfrac{1}{3}(1 - 0{,}630b/a) = \tfrac{1}{3}(1 - 0{,}630 \times 0{,}0109) = 0{,}331$$

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{torção}} = \frac{T}{c_1 ab^2} = \frac{822{,}8 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}}{(0{,}331)(350 \text{ mm})(3{,}8 \text{ mm})^2}$$
$$= 491{,}8 \text{ MPa}$$

Tensões combinadas. A tensão máxima em razão da flexão e da torção combinadas ocorre na linha neutra, na superfície interna da alma, e é

$$\tau_{\text{máx}} = 23{,}2 \text{ MPa} + 491{,}8 \text{ MPa} = 515 \text{ MPa}.$$

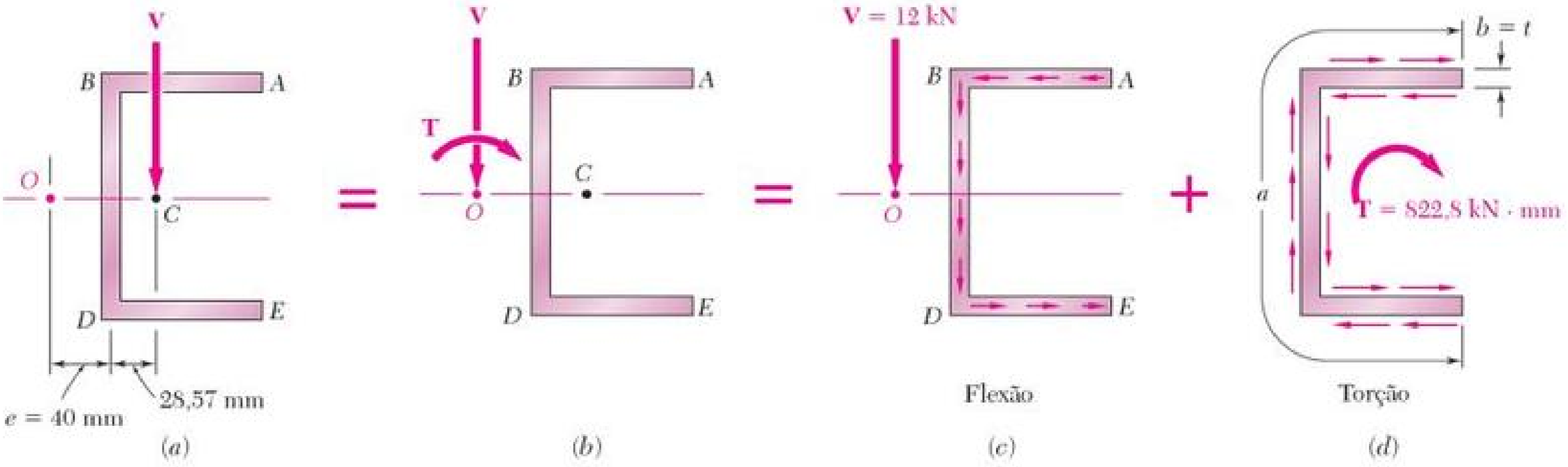


Fig. 6.57

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

mento ou componente que não esteja submetido a uma força externa (Fig. 7.4).

Considerando na Seção 7.2 um estado plano de tensão em um dado ponto Q caracterizado pelas componentes de tensão σ_x, σ_y, e τ_{xy} associadas com o elemento mostrado na Fig. 7.5*a*, você aprenderá a determinar as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas com aquele elemento depois que ele sofreu uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 7.5*b*). Na Seção 7.3, você determinará o valor θ_p de θ para o qual as tensões $\sigma_{x'}$ e $\sigma_{y'}$ são, respectivamente, máximo e mínimo; esses valores da tensão normal são as *tensões principais* no ponto Q, e as faces correspondentes do elemento definem os *planos principais de tensão* naquele ponto. Você determinará também o valor de θ_c do ângulo de rotação para o qual a tensão de cisalhamento é máxima, bem como o valor daquela tensão.

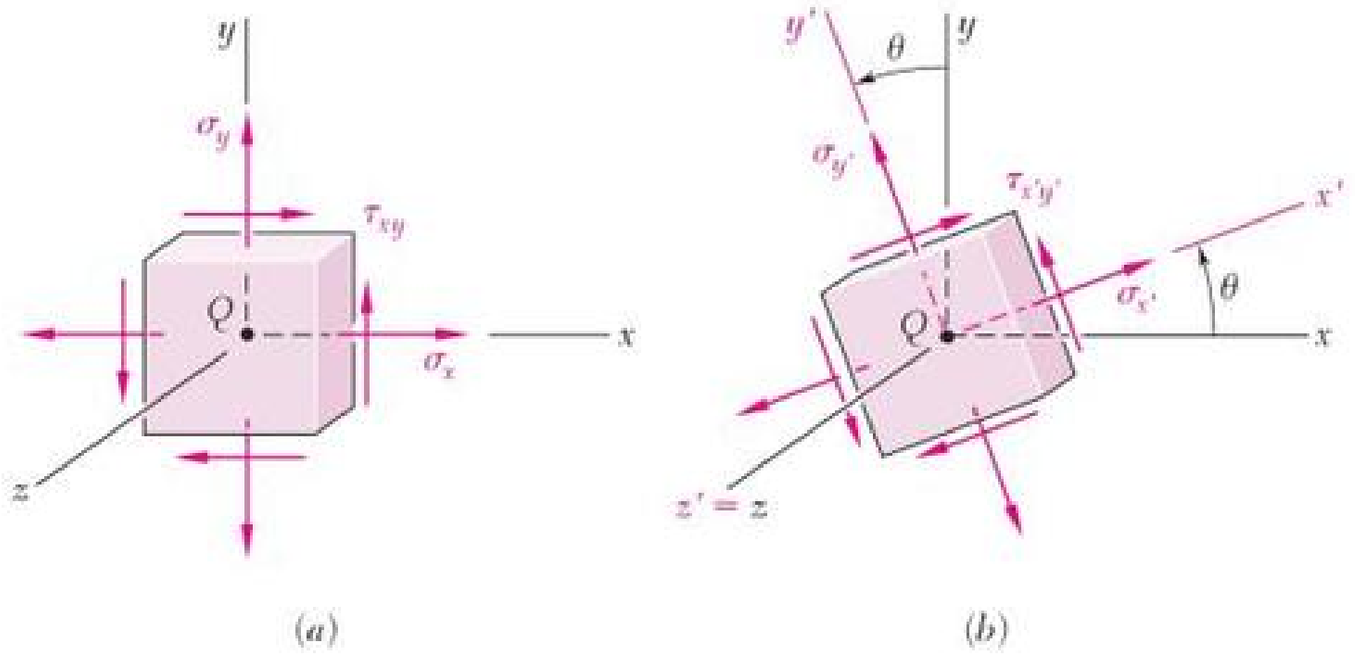


Fig. 7.5

Na Seção 7.4 será apresentado um método alternativo para a solução de problemas que envolvem estado plano de tensão, a transformação de tensões planas com base no uso do *círculo de Mohr*.

Na Seção 7.5, vamos considerar o *estado tridimensional de tensão* em um dado ponto. Será desenvolvida uma fórmula para a determinação da tensão normal em um plano de orientação arbitrária naquele ponto. Na Seção 7.6, discutiremos as rotações de um elemento de volume em relação a cada um dos eixos principais de tensão e veremos que as transformações de tensão correspondentes podem ser descritas por três diferentes círculos de Mohr. Você observará também que, no caso de um estado *plano de tensão* em um dado ponto, o valor máximo da tensão de cisalhamento obtida anteriormente, considerando rotações no plano de tensão, não representa necessariamente a tensão de cisalhamento máxima naquele ponto. Isso o levará a distinguir entre tensões de cisalhamento máximas *no plano* e *fora do plano das tensões*.

O *critério de escoamento* para materiais dúcteis em estado plano de tensão será desenvolvido na Seção 7.7. Para prever se um dado material escoará em algum ponto crítico sob condições dadas de carregamento, você determinará as tensões principais σ_a e σ_b naquele ponto e verificará se σ_a, σ_b e a tensão de escoamento σ_E do material satisfazem a algum critério. Dois critérios de uso comum são: o *critério da tensão de cisalhamento máxima* e o *critério da energia de distorção máxima*. Na Seção 7.8, serão desenvolvidos de modo similar *critérios de fratura* para materiais frágeis submetidos a estado plano de tensão; esses critérios envolverão as tensões principais σ_a e σ_b em algum ponto crítico e o limite de tensão σ_L do material. Serão discutidos dois critérios: o critério da *tensão normal máxima* e o *critério de Mohr*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

o eixo z é um dos três eixos principais em Q, e o ponto correspondente no diagrama do círculo de Mohr é a origem O, em que $\epsilon = \gamma = 0$. Se os pontos A e B que definem os eixos principais dentro do plano de deformação estiverem em lados opostos de O (Fig. 7.74*a*), as deformações específicas principais correspondentes representarão as deformações específicas normais máxima e mínima no ponto Q, e a deformação de cisalhamento máxima será igual à deformação de cisalhamento máxima no plano da deformação correspondente aos pontos D e E. Em contrapartida, se A e B estiverem do mesmo lado de O (Fig. 7.74*b*), ou seja, se ϵ_a e ϵ_b tiverem o mesmo sinal, então a deformação de cisalhamento máxima será definida pelos pontos D' e E' no círculo de diâmetro OA, e temos $\gamma_{máx} = \epsilon_{máx}$.

Consideramos agora o caso particular de *estado plano de tensão* encontrado em uma placa fina ou na superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina (Seção 7.1). Selecionando os eixos x e y no plano de tensão, temos $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ e verificamos ainda que o eixo z é um eixo principal de tensão. Como vimos anteriormente, se a deformação for elástica e se o material for homogêneo e isotrópico, conclui-se com a lei de Hooke que $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$; assim, o eixo z será também um eixo principal de deformação, e o círculo de Mohr poderá ser utilizado para analisar a transformação de deformação no plano xy. No entanto, conforme veremos agora, a lei de Hooke *não* permite concluir que $\epsilon_z = 0$; sem dúvida, um estado plano de tensão, em geral, não resultará em um estado plano de deformação .†

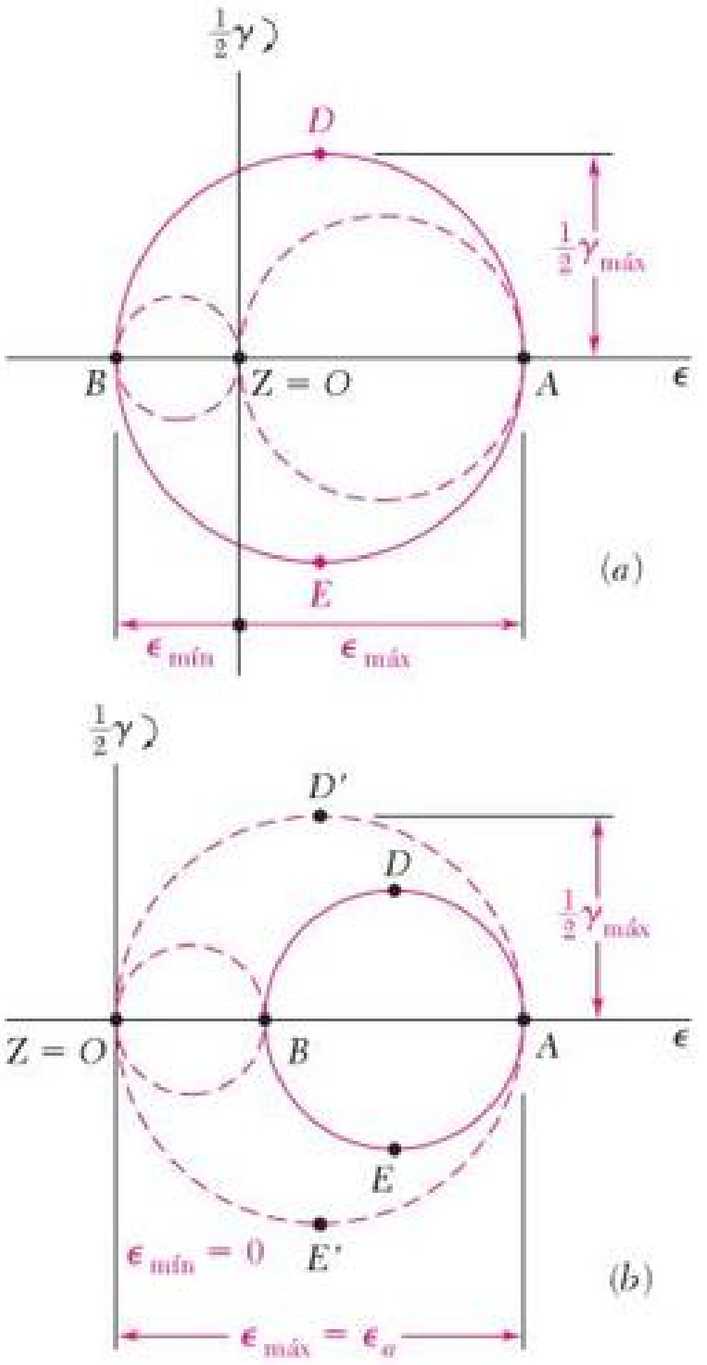


Fig. 7.74

Chamando de a e b os eixos principais no plano das tensões e de c o eixo principal perpendicular àquele plano, fazemos $\sigma_x = \sigma_a$, $\sigma_y = \sigma_b$ e $\sigma_z = 0$ nas Equações (2.28) de acordo com a lei de Hooke generalizada (Seção 2.12) e escrevemos

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \tag{7.55}$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \tag{7.56}$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.57}$$

Somando as Equações (7.55) e (7.56) membro a membro, temos

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1 - \nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \tag{7.58}$$

Resolvendo a Equação (7.58) para $\sigma_a + \sigma_b$ e substituindo na Equação (7.57), escrevemos

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \tag{7.59}$$

A relação obtida define a terceira deformação específica principal em termos das deformações principais "no plano". Notamos que, se B estiver localizado entre A e C no diagrama do círculo de Mohr (Fig. 7.75), a deformação de cisalhamento máxima será igual ao diâmetro CA do círculo correspondente a uma rotação em torno do eixo b, fora do plano das tensões.

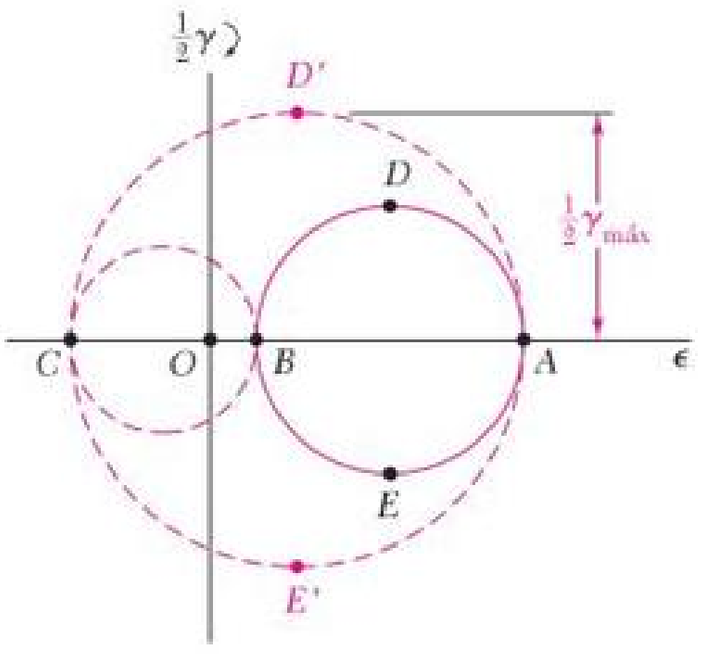


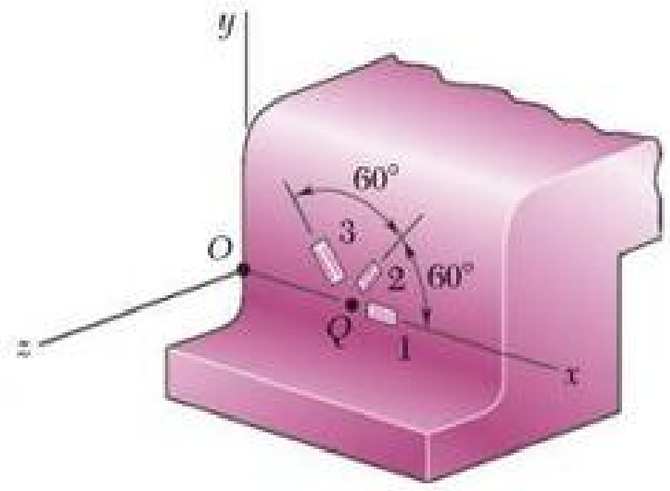
Fig. 7.75

†Ver a nota de rodapé na página 470.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 7.7

Usando uma roseta de 60°, foram determinadas as seguintes deformações específicas no ponto Q na superfície de uma base de máquina de aço:

$$\epsilon_1 = 40\,\mu \qquad \epsilon_2 = 980\,\mu \qquad \epsilon_3 = 330\,\mu$$

Usando os eixos de coordenadas mostrados, determine no ponto Q (*a*) as componentes de deformações ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, (*b*) as deformações específicas principais e (*c*) a deformação de cisalhamento máxima. (Use $\nu = 0{,}29$.)

SOLUÇÃO

a. Componentes de deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Para os eixos de coordenadas mostrados

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 60° \qquad \theta_3 = 120°$$

Substituindo esses valores nas Equações (7.60), temos

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \epsilon_x(1) &&+ \epsilon_y(0) &&+ \gamma_{xy}(0)(1)\\
\epsilon_2 &= \epsilon_x(0{,}500)^2 &&+ \epsilon_y(0{,}866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0{,}866)(0{,}500)\\
\epsilon_3 &= \epsilon_x(-0{,}500)^2 &&+ \epsilon_y(0{,}866)^2 &&+ \gamma_{xy}(0{,}866)(-0{,}500)
\end{aligned}$$

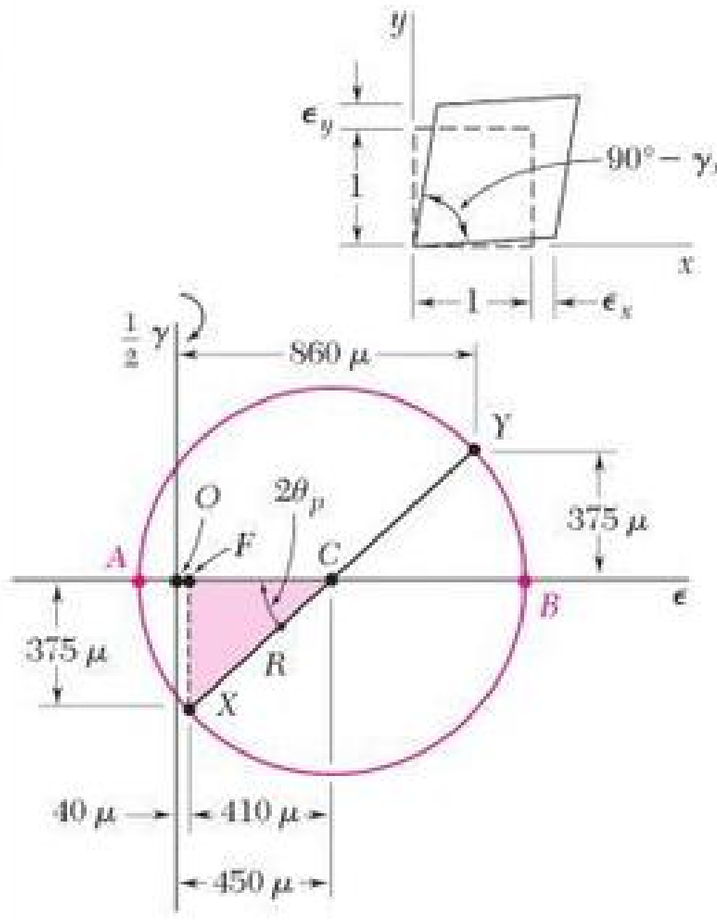
Resolvendo essas equações para ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}, obtemos

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}(2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0{,}866}$$

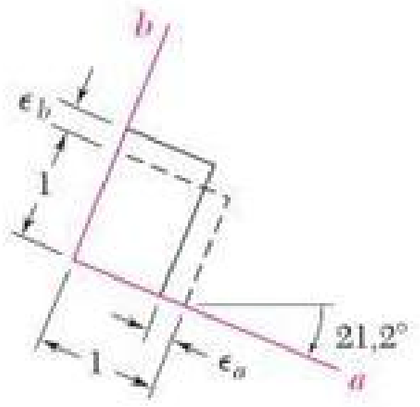
Substituindo os valores dados para ϵ_1, ϵ_2 e ϵ_3, temos

$$\epsilon_x = 40\,\mu \qquad \epsilon_y = \tfrac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \qquad \epsilon_y = +860\,\mu \blacktriangleleft$$
$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/0{,}866 \qquad \gamma_{xy} = 750\,\mu \blacktriangleleft$$

Essas deformações específica estão indicadas no elemento mostrado.



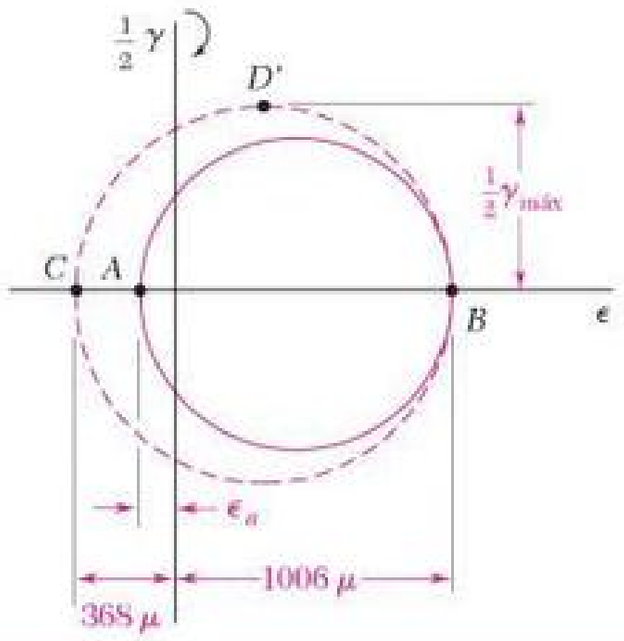
b. Deformações específica principais. Observamos que o lado do elemento associado a ϵ_x sofre uma rotação no sentido anti-horário; assim, representamos o ponto X abaixo do eixo horizontal, isto é, $X(40, -375)$. Representamos então $Y(860, +375)$ e traçamos o círculo de Mohr.



$$\epsilon_{méd} = \tfrac{1}{2}(860\,\mu + 40\,\mu) = 450\,\mu$$
$$R = \sqrt{(375\,\mu)^2 + (410\,\mu)^2} = 556\,\mu$$
$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{375\,\mu}{410\,\mu} \qquad 2\theta_p = 42{,}4°\downarrow \qquad \theta_p = 21{,}2°\downarrow$$

Os pontos A e B correspondem às deformações específicas principais. Temos

$$\epsilon_a = \epsilon_{méd} - R = 450\,\mu - 556\,\mu \qquad \epsilon_a = -106\,\mu \blacktriangleleft$$
$$\epsilon_b = \epsilon_{méd} + R = 450\,\mu + 556\,\mu \qquad \epsilon_b = +1006\,\mu \blacktriangleleft$$



Como $\sigma_z = 0$ na superfície, usamos a Equação (7.59) para determinar a deformação específica principal ϵ_c

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0{,}29}{1 - 0{,}29}(-106\,\mu + 1006\,\mu) \qquad \epsilon_c = -368\,\mu \blacktriangleleft$$

c. Deformação de cisalhamento máxima. Representando o ponto C e traçando o círculo de Mohr através dos pontos B e C, obtemos o ponto D' e escrevemos

$$\tfrac{1}{2}\gamma_{máx} = \tfrac{1}{2}(1006\,\mu + 368\,\mu) \qquad \gamma_{máx} = 1374\,\mu \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

REVISÃO E RESUMO DO CAPÍTULO 7

A primeira parte deste capítulo foi dedicada ao estudo da *transformação do estado de tensão* sob a rotação de eixos e à sua aplicação para a solução de problemas de engenharia, e sua segunda parte tratou de um estudo similar da *transformação do estado de deformação*.

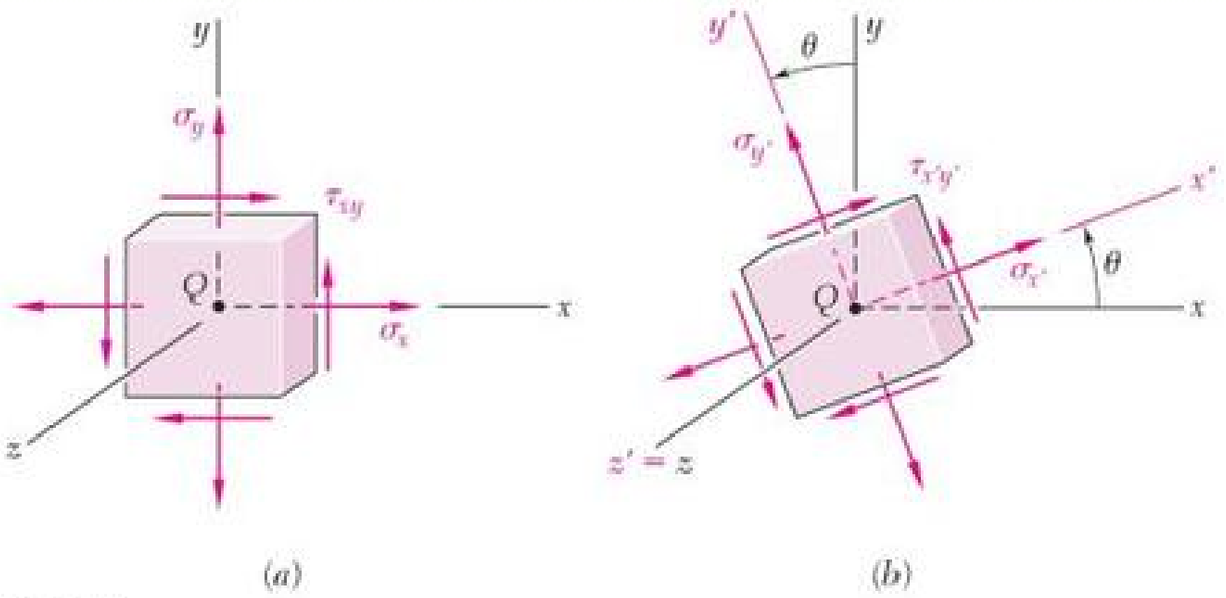


Fig. 7.5

Transformação do estado plano de tensão

Considerando primeiramente um estado *plano* de *tensão* em um dado ponto Q [Seção 7.2] e chamando de σ_x, σ_y e τ_{xy} as componentes de tensão associadas ao elemento mostrado na Fig. 7.5*a*, deduzimos as fórmulas a seguir, definindo as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$ associadas àquele elemento depois de ele ter sofrido uma rotação através de um ângulo θ em torno do eixo z (Fig. 7.5*b*)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.5}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{7.7}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{7.6}$$

Na Seção 7.3, determinamos os valores de θ_p do ângulo de rotação que correspondem aos valores máximo e mínimo da tensão normal no ponto Q. Escrevemos

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.12}$$

Os dois valores obtidos para θ_p estavam defasados em 90° (Fig. 7.11) e definiam os *planos principais de tensão* no ponto Q. Os valores corres-

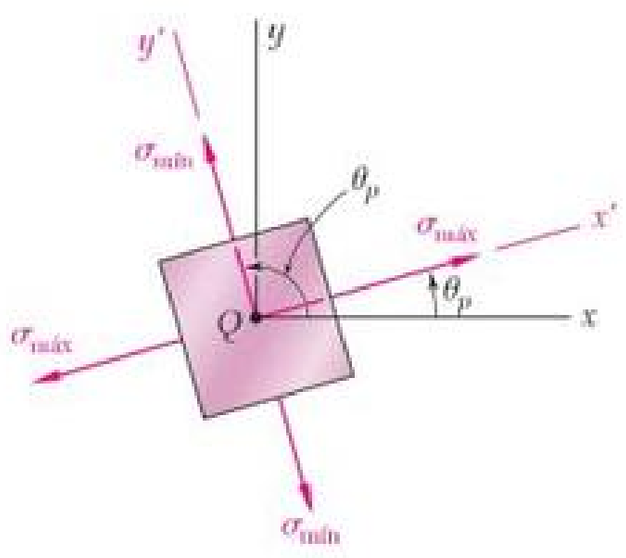


Fig. 7.11

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

*8.1. Introdução

Na primeira parte desse capítulo, você aplicará, no projeto de vigas e eixos, os conhecimentos adquiridos no Capítulo 7 sobre transformação de tensões. Na segunda parte do capítulo, você aprenderá a determinar as tensões principais em componentes estruturais e elementos de máquinas sob determinadas condições de carregamento.

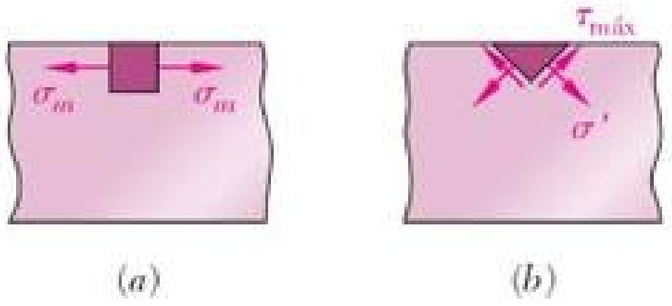


Fig. 8.1

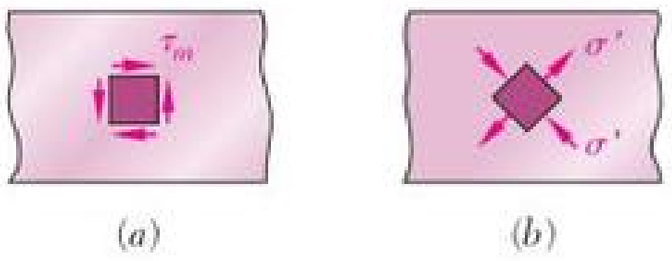


Fig. 8.2

No Capítulo 5, você aprendeu a calcular a tensão normal máxima σ_m que ocorre em uma viga sob um carregamento transversal (Fig. 8.1*a*) e verificar se esse valor ultrapassava a tensão admissível σ_{adm} para determinado material. Se ultrapassasse, o projeto da viga não seria aceitável. Enquanto o material frágil tende a falhar em tração, o material dúctil tende a falhar em cisalhamento (Fig. 8.1*b*). O fato de que $\sigma_m > \sigma_{adm}$ indica que o $|M|_{máx}$ é muito grande para a seção transversal selecionada, mas não fornece nenhuma informação sobre o verdadeiro mecanismo da falha. Da mesma forma, o fato de que $\tau_m > \tau_{adm}$ simplesmente indica que $|V|_{máx}$ é muito grande para a seção transversal selecionada. Assim, enquanto o perigo para um material dúctil é realmente falhar em cisalhamento (Fig. 8.2*a*), o perigo para um material frágil é falhar em tração sob as tensões principais (Fig. 8.2*b*). A distribuição das tensões principais em uma viga será discutida na Seção 8.2.

Dependendo da forma da seção transversal da viga e do valor da força cortante V na seção crítica em que $|M| = |M|_{máx}$, é provável que o maior valor da tensão normal não ocorra na parte superior ou inferior da seção, mas em algum outro ponto no interior dela. Conforme você verá na Seção 8.2, uma combinação de grandes valores de σ_x e τ_{xy} próximo da junção da alma com as mesas de uma viga de perfil de mesas largas ou de uma viga de perfil I (padrão americano) pode resultar em um valor da tensão principal $\sigma_{máx}$ (Fig. 8.3) que é maior que o valor σ_m na superfície da viga.

Fig. 8.3

A Seção 8.3 será dedicada ao projeto de eixos de transmissão submetidos a forças transversais, bem como a torques. Será levado em conta o efeito das tensões normais provocadas pelo momento fletor e das tensões de cisalhamento provocadas pelo momento torçor.

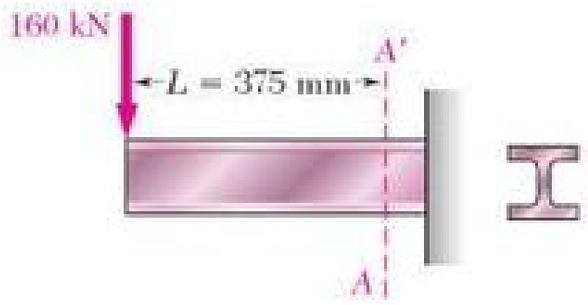
Na Seção 8.4, você aprenderá a determinar as tensões em determinado ponto K de um corpo de forma arbitrária submetido a um carregamento combinado. Primeiro, você reduzirá o carregamento dado a forças e momentos na seção que contém o ponto K. Em seguida, calculará as tensões, normal e de cisalhamento, em K. Finalmente, utilizando um dos métodos de transformação de tensão que você aprendeu no Capítulo 7, determinará os planos principais, tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no ponto K.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMA RESOLVIDO 8.1

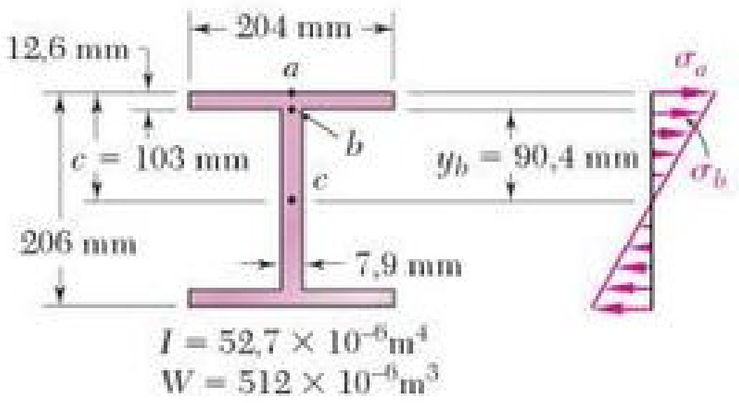


Uma força de 160 kN é aplicada, conforme mostra a figura, à extremidade de uma viga de aço laminado W200 × 52. Desprezando o efeito dos adoçamentos e das concentrações de tensão, verifique se as tensões normais na viga satisfazem à especificação de projeto de que elas devem ser iguais ou menores que 150 MPa na seção A-A'.

SOLUÇÃO

Força cortante e momento fletor. Na seção A-A', temos

$$M_A = (160\text{ kN})(0{,}375\text{ m}) = 60\text{ kN}\cdot\text{m}$$
$$V_A = 160\text{ kN}$$



Tensões normais no plano transversal. Consultando a tabela das *Propriedades de Perfis de Aço Laminado* no Apêndice C, obtemos os dados mostrados e então determinamos as tensões σ_a e σ_b.

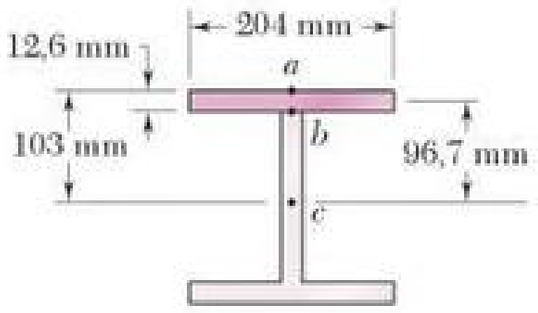
No ponto a:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{W} = \frac{60\text{ kN}\cdot\text{m}}{512\times10^{-6}\text{ m}^3} = 117{,}2\text{ MPa}$$

No ponto b:

$$\sigma_b = \sigma_a\frac{y_b}{c} = (117{,}2\text{ MPa})\frac{90{,}4\text{ mm}}{103\text{ mm}} = 102{,}9\text{ MPa}$$

Notamos que as tensões normais no plano transversal são menores que 150 MPa.



Tensões de cisalhamento no plano transversal.

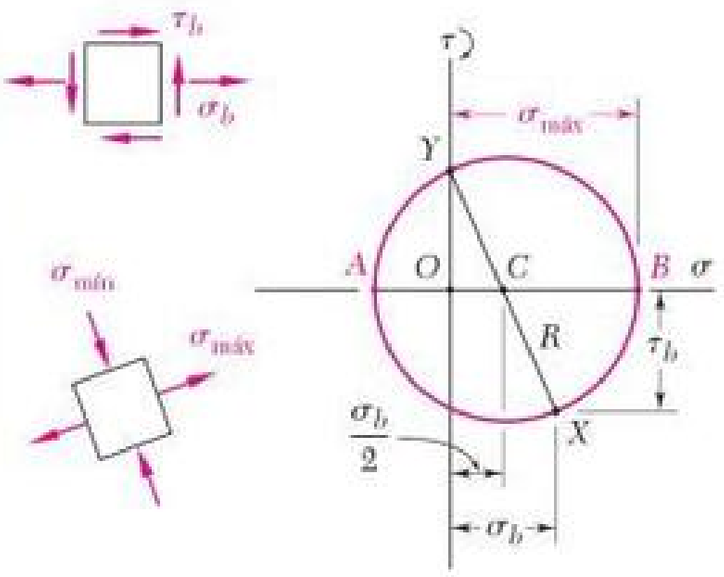
No ponto a:

$$Q = 0 \qquad \tau_a = 0$$

No ponto b:

$$Q = (204\times12{,}6)(96{,}7) = 248{,}6\times10^3\text{ mm}^3 = 248{,}6\times10^{-6}\text{ m}^3$$

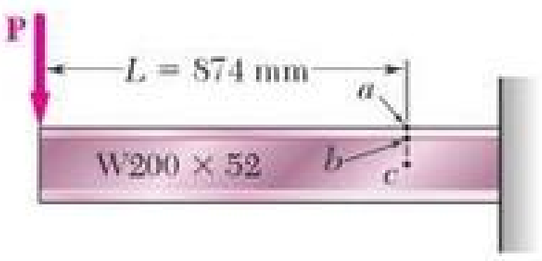
$$\tau_b = \frac{V_A Q}{It} = \frac{(160\text{ kN})(248{,}6\times10^{-6}\text{ m}^3)}{(52{,}7\times10^{-6}\text{ m}^4)(0{,}0079\text{ m})} = 95{,}5\text{ MPa}$$



Tensão principal no ponto *b*. O estado de tensão no ponto b consiste na tensão normal $\sigma_b = 102{,}4$ MPa e na tensão de cisalhamento $\tau_b = 95{,}5$ MPa. Traçamos o círculo de Mohr e encontramos

$$\sigma_{máx} = \frac{1}{2}\sigma_b + R = \frac{1}{2}\sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$
$$= \frac{102{,}9}{2} + \sqrt{\left(\frac{102{,}9}{2}\right)^2 + (95{,}5)^2}$$
$$\sigma_{máx} = 159{,}9\text{ MPa}$$

A especificação, $\sigma_{máx} \le 150$ MPa, *não* é satisfeita. ◀



Comentário. Para essa viga e esse carregamento, a tensão principal no ponto b é 36% maior que a tensão normal no ponto a. Para $L \ge 874$ mm, a tensão normal máxima ocorreria no ponto a.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 8.01

Duas forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, de intensidade $P_1 = 15$ kN e $P_2 = 18$ kN, são aplicadas, como mostra a figura, à extremidade A da barra AB, que está soldada a um eixo cilíndrico BD de raio $c = 20$ mm (Fig. 8.21). Sabendo que a distância de A até o centro do eixo BD é $a = 50$ mm e considerando que todas as tensões permanecem abaixo do limite de proporcionalidade do material, determine (a) as tensões normal e de cisalhamento no ponto K da seção transversal do eixo BD localizado a uma distância $b = 60$ mm da extremidade B, (b) os eixos principais e as tensões principais em K e (c) a tensão de cisalhamento máxima em K.

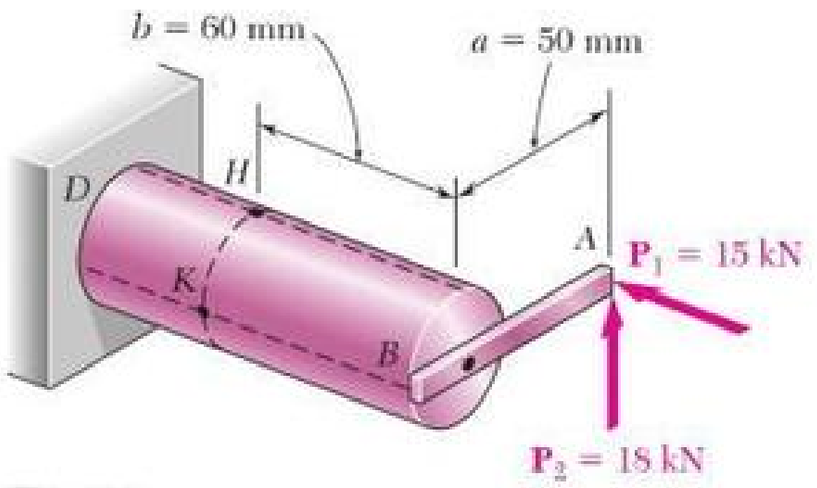


Fig. 8.21

Esforços internos em determinada seção. Primeiro substituímos as forças $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ por um sistema equivalente de forças e momentos aplicados ao centro C da seção contendo o ponto K (Fig. 8.22). Esse sistema, que representa os esforços internos na seção, consiste nas seguintes forças e momentos:

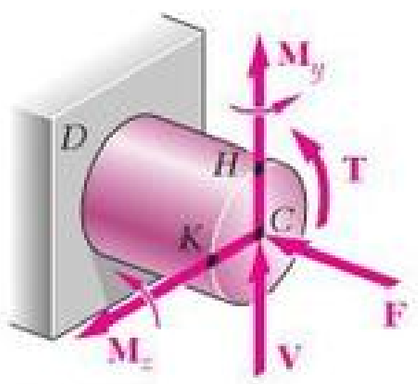


Fig. 8.22

1. Uma força axial centrada $\mathbf{F}$ igual à força $\mathbf{P}_1$, de intensidade
$$F = P_1 = 15 \text{ kN}$$
2. Uma força cortante $\mathbf{V}$ igual à força $\mathbf{P}_2$, de intensidade
$$V = P_2 = 18 \text{ kN}$$
3. O conjugado de torção $\mathbf{T}$ de torque T igual ao momento de $\mathbf{P}_2$ em relação ao centro do eixo BD
$$T = P_2 a = (18 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 900 \text{ N} \cdot \text{m}$$
4. O conjugado de flexão $\mathbf{M}_y$, de momento M_y igual ao momento de $\mathbf{P}_1$ em relação a um eixo vertical que passa por C:
$$M_y = P_1 a = (15 \text{ kN})(50 \text{ mm}) = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$$
5. O conjugado de flexão $\mathbf{M}_z$, de momento M_z igual ao momento de $\mathbf{P}_2$ em relação a um eixo transversal horizontal que passa por C:
$$M_z = P_2 b = (18 \text{ kN})(60 \text{ mm}) = 1080 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 8.23.

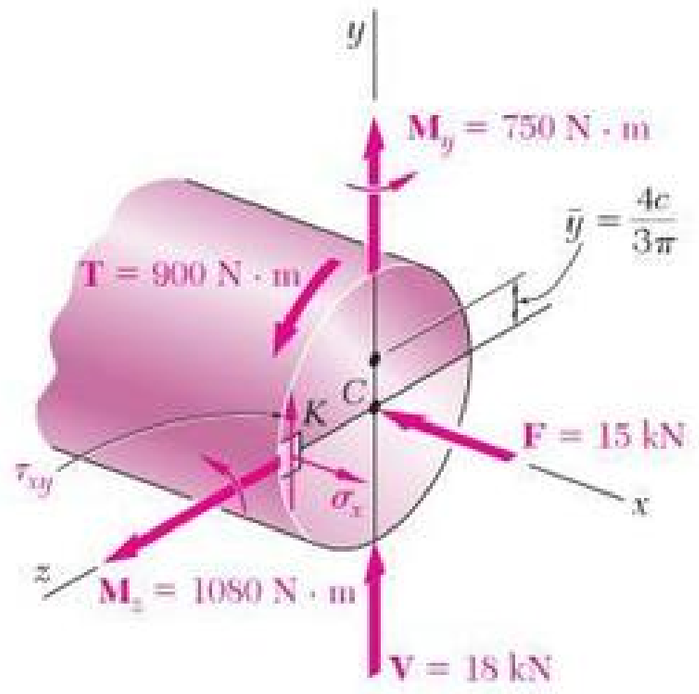


Fig. 8.23

a. Tensões normal e de cisalhamento no ponto K. Cada uma das forças e momentos mostrados na Fig. 8.23 pode produzir uma tensão normal ou de cisalhamento no ponto K. Nosso objetivo é calcular separadamente cada uma dessas tensões, depois somar as tensões normais e as de cisalhamento. Mas primeiro temos que determinar as propriedades geométricas da seção.

Propriedades geométricas da seção. Temos

$$A = \pi c^2 = \pi(0{,}020 \text{ m})^2 = 1{,}257 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}\pi c^4 = \tfrac{1}{4}\pi(0{,}020 \text{ m})^4 = 125{,}7 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_C = \tfrac{1}{2}\pi c^4 = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}020 \text{ m})^4 = 251{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Determinamos também o momento estático Q e a largura t da área da seção transversal localizada acima do eixo z. Lembrando que $\bar{y} = 4c/3\pi$ para um semicírculo de raio c, temos

$$Q = A'\bar{y} = \left(\frac{1}{2}\pi c^2\right)\left(\frac{4c}{3\pi}\right) = \frac{2}{3}c^3 = \frac{2}{3}(0{,}020 \text{ m})^3$$
$$= 5{,}33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

e

$$t = 2c = 2(0{,}020 \text{ m}) = 0{,}040 \text{ m}$$

Tensões normais. Observamos que as tensões normais são produzidas em K pela força centrada $\mathbf{F}$ e pelo momento fletor $\mathbf{M}_y$, porém o momento $\mathbf{M}_z$ não produz nenhuma tensão em K, pois K está localizado na linha neutra correspondente àquele momento. Determinando cada um dos sinais por meio da Fig. 8.23, temos

$$\sigma_x = -\frac{F}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -11{,}9 \text{ MPa} + \frac{(750 \text{ N} \cdot \text{m})(0{,}020 \text{ m})}{125{,}7 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$
$$= -11{,}9 \text{ MPa} + 119{,}3 \text{ MPa}$$
$$\sigma_x = +107{,}4 \text{ MPa}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

8.37 O eixo de um pequeno caminhão está submetido às forças e aos momentos mostrados na figura. Sabendo que o diâmetro do eixo é de 36,1 mm, determine as tensões normais e de cisalhamento no ponto H localizado na superfície superior do eixo.

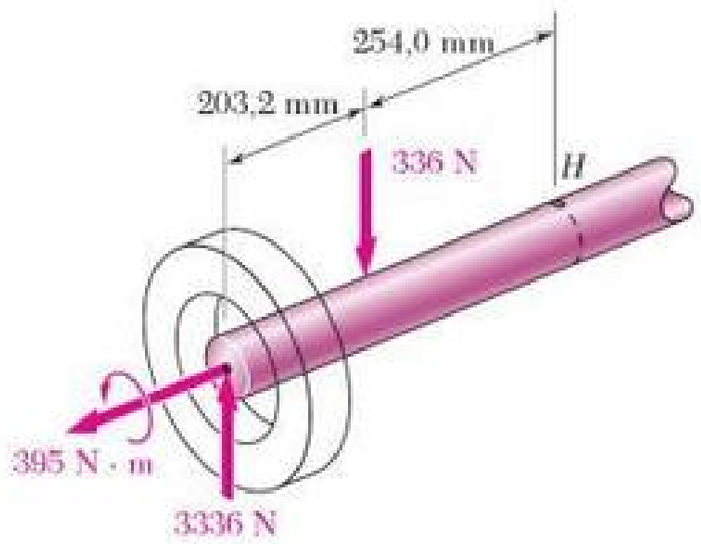


Fig. P8.37

8.38 Uma tira fina é enrolada em torno da barra de seção transversal cheia de raio $c = 20$ mm conforme é mostrado. Sabendo que $l = 100$ mm e $F = 5$ kN, determine as tensões, normal e de cisalhamento (*a*) no ponto H e (*b*) no ponto K.

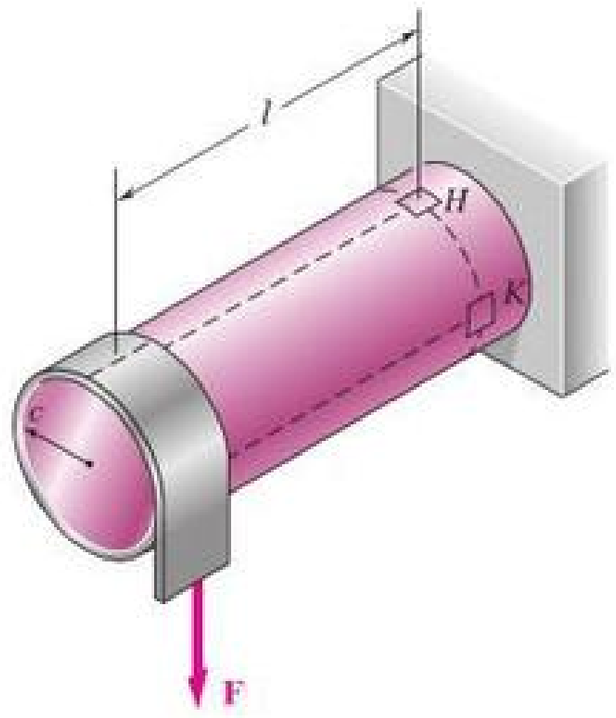


Fig. P8.38

8.39 Várias forças são aplicadas ao tubo montado conforme a figura. Sabendo que o tubo tem diâmetros interno e externo iguais a 40,9 mm e 48,3 mm, respectivamente, determine as tensões, normal e de cisalhamento, (*a*) no ponto H e (*b*) no ponto K.

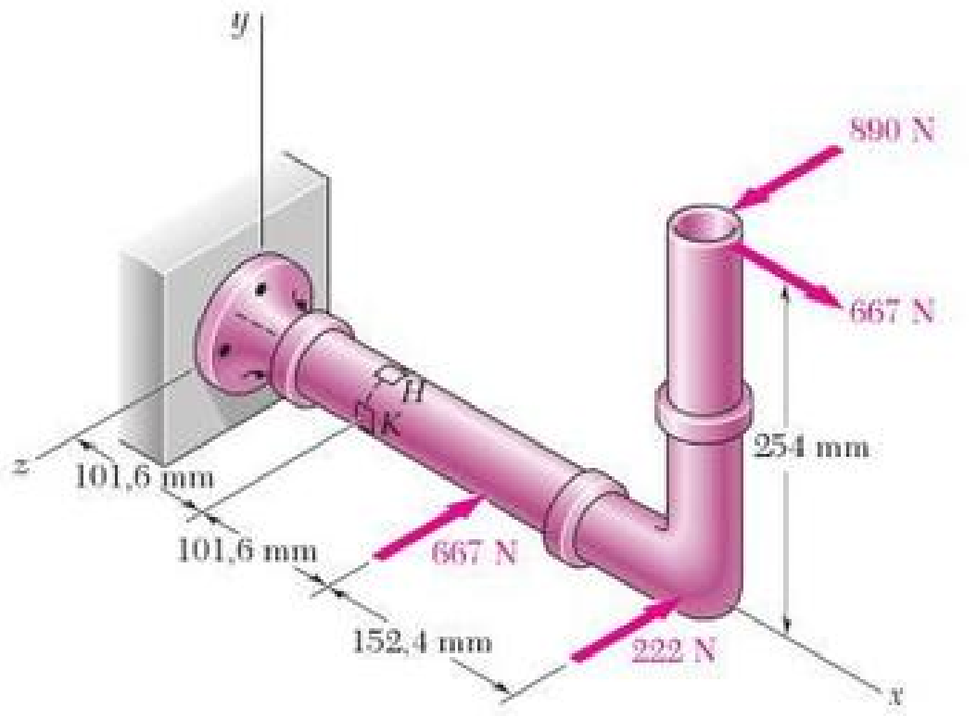


Fig. *P8.39*

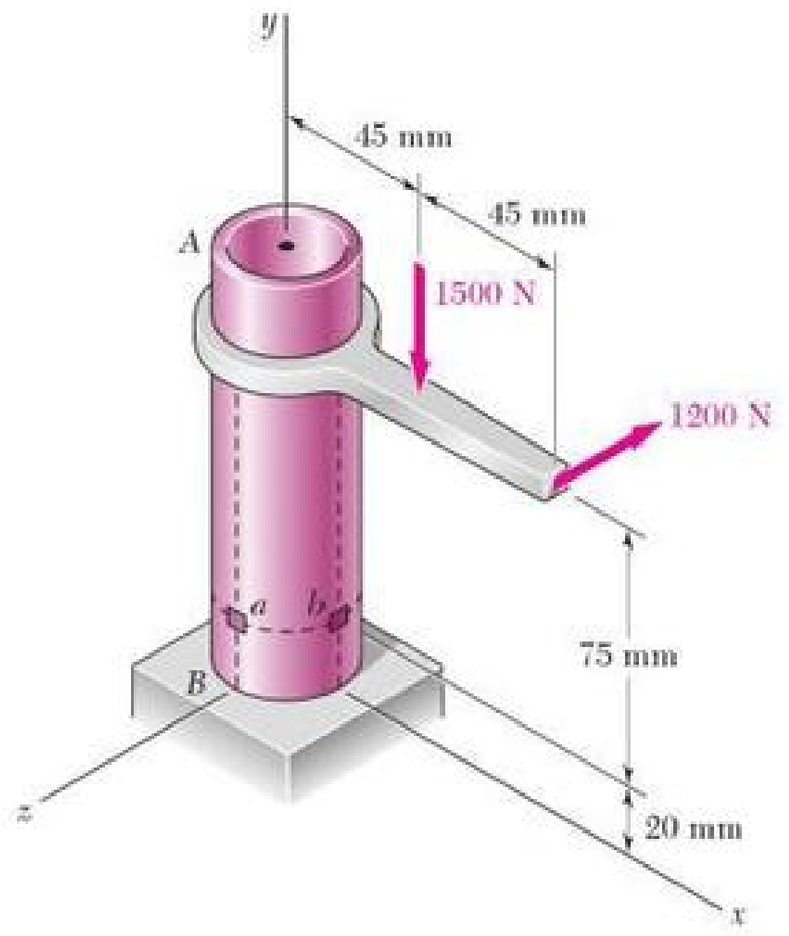


Fig. P8.40

8.40 Duas forças são aplicadas ao tubo AB, conforme mostra a figura. Sabendo que o tubo tem diâmetros interno e externo iguais a 35 mm e 42 mm, respectivamente, determine as tensões normal e de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no ponto *b*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

8.60 Uma força vertical **P** é aplicada ao centro da extremidade livre da viga em balanço *AB*. (*a*) Se a viga for instalada com a alma vertical ($\beta = 0$) e com seu eixo longitudinal *AB* horizontal, determine a intensidade da força **P** para a qual a tensão normal no ponto *a* é +120 MPa. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que a viga é instalada com $\beta = 3°$.

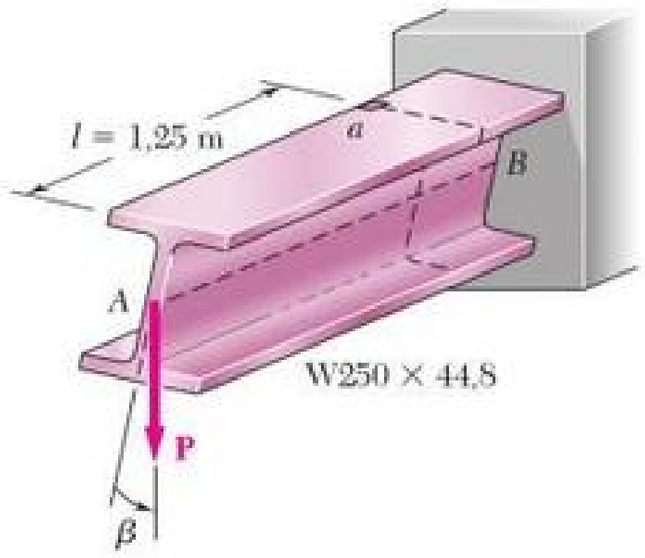


Fig. P8.60

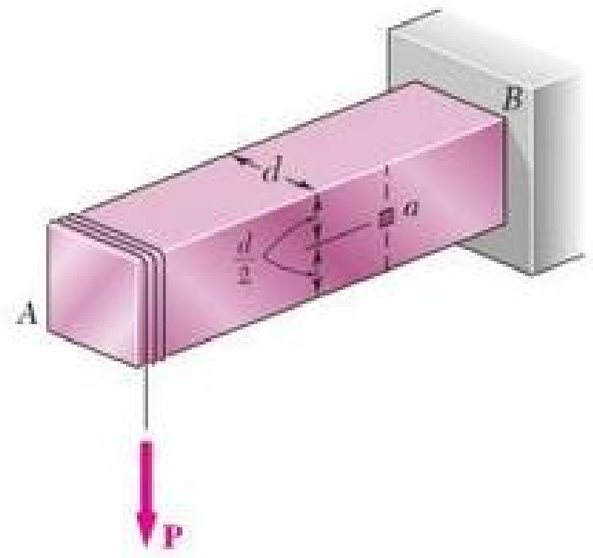


Fig. *P8.61*

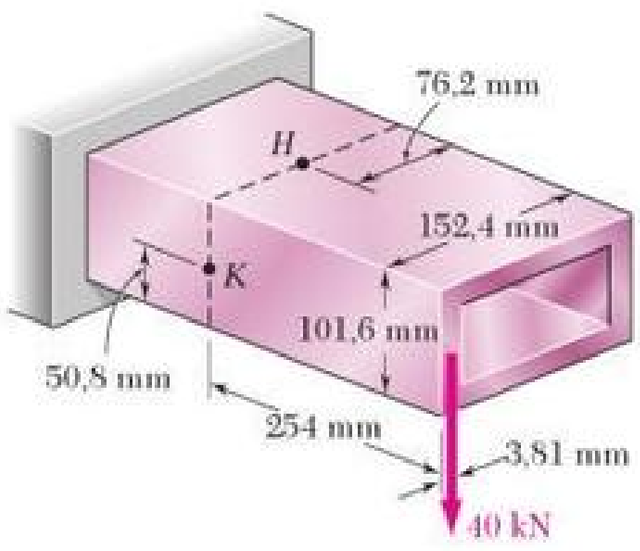


Fig. P8.62

***8.61** Uma força **P** de 5 kN é aplicada a um fio que está enrolado ao redor da barra *AB*, conforme mostra a figura. Sabendo que a seção transversal da barra é um quadrado de lado $d = 40$ mm, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *a*.

***8.62** Sabendo que o tubo estrutural mostrado na figura tem uma parede de espessura uniforme de 7,62 mm, determine as tensões e os planos principais, e a tensão de cisalhamento máxima (*a*) no ponto *H* e (*b*) no ponto *K*.

***8.63** O tubo estrutural mostrado na figura tem uma parede de espessura uniforme de 7,62 mm. Sabendo que a força de 66,7 kN é aplicada 3,8 mm acima da base do tubo, determine a tensão de cisalhamento (*a*) no ponto *a* e (*b*) no ponto *b*.

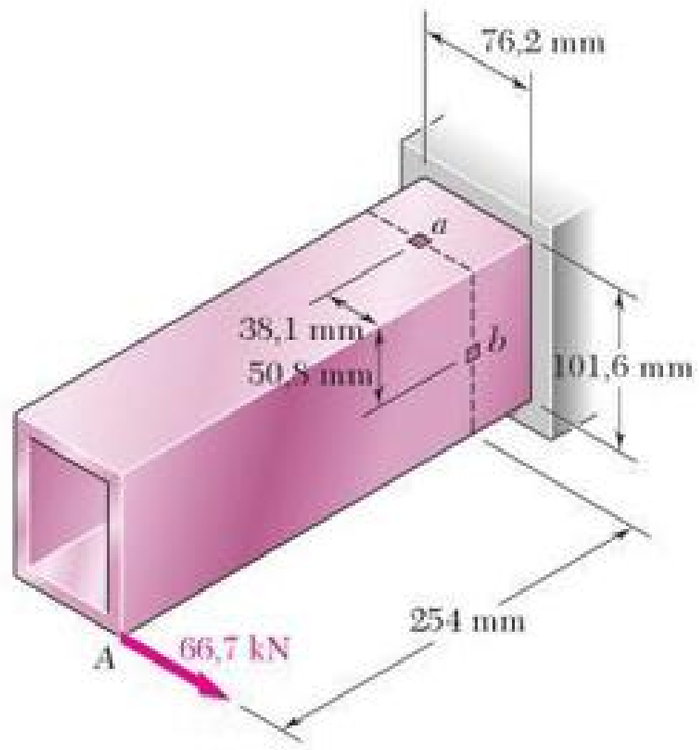


Fig. *P8.63*

***8.64** Para o tubo e o carregamento do Problema 8.63, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto *b*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

8.C5 Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular as tensões normal e de cisalhamento nos pontos de coordenadas y e z localizados na superfície de uma peça de máquina que tem uma seção retangular. Sabe-se que os esforços internos são equivalentes ao sistema de forças e momentos mostrados. Utilize esse programa para resolver (a) o Problema 8.45*b* e (b) o Problema 8.47*a*.

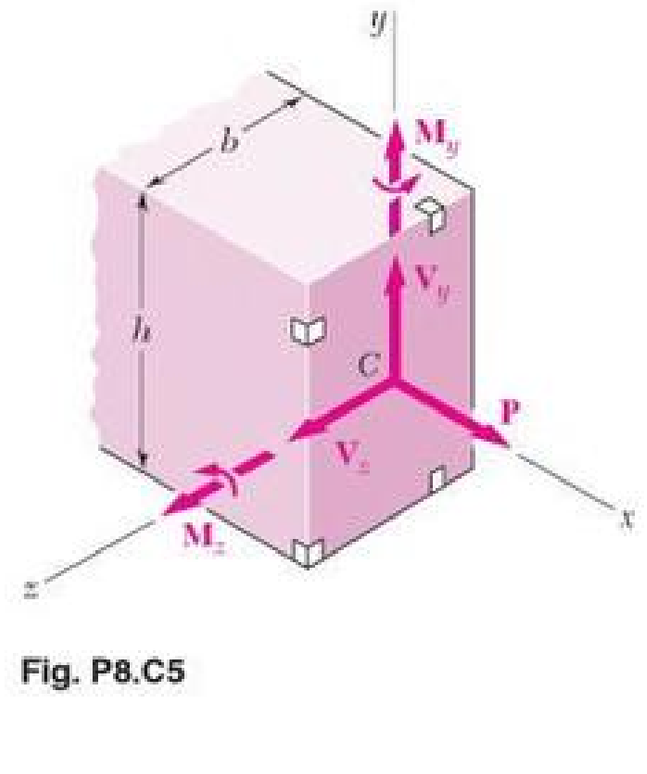


Fig. P8.C5

8.C6 A viga AB tem uma seção transversal retangular de 10 mm × 24 mm. Para o carregamento mostrado, elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar as tensões normal e de cisalhamento nos pontos H e K para valores de d de 0 a 120 mm, utilizando incrementos de 15 mm. Utilize esse programa para resolver o Problema 8.35.

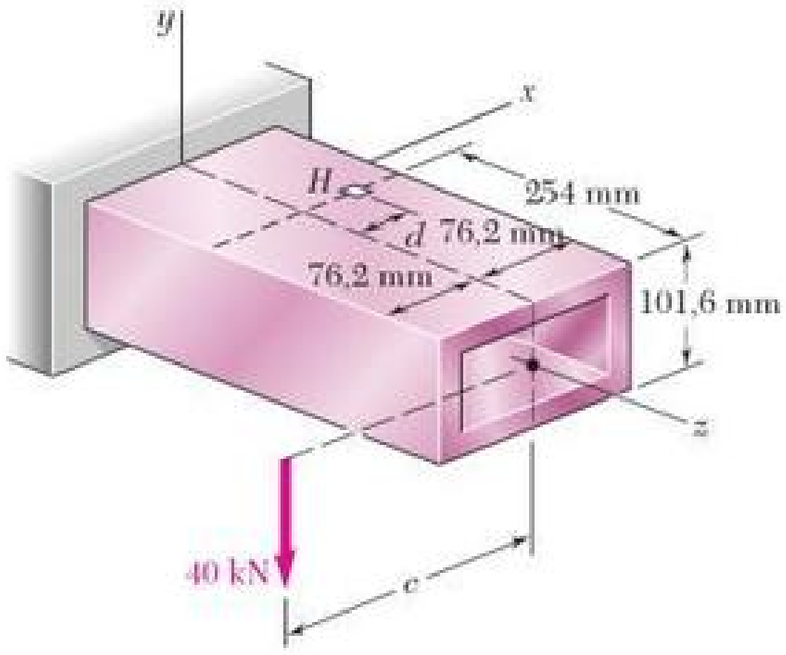


Fig. P8.C7

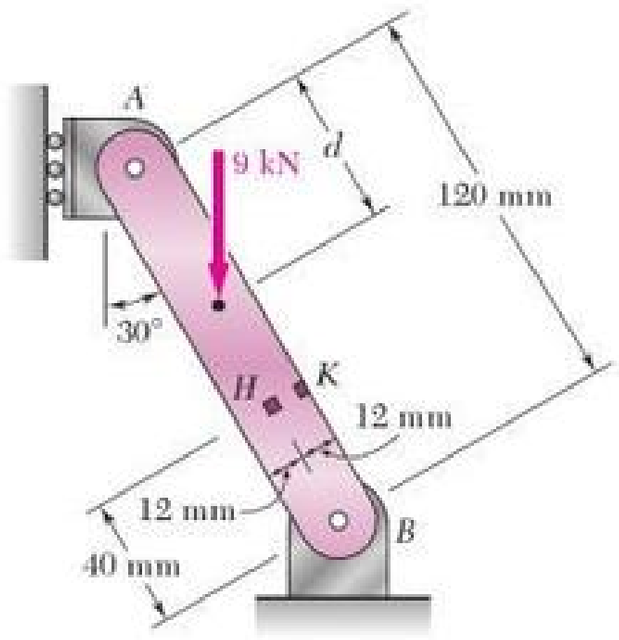


Fig. P8.C6

***8.C7** O tubo estrutural mostrado tem uma espessura de parede uniforme de 7,62 mm. Uma força de 40 kN é aplicada a uma barra (não mostrada) que está soldada à extremidade do tubo. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para determinar, para qualquer valor dado de c, as tensões e os planos principais e a tensão de cisalhamento máxima no ponto H para valores de d de −76,2 mm até +76,2 mm, utilizando incrementos de 25,4 mm. Utilize esse programa para resolver o Problema 8.62*a*.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

em ambas as extremidades da viga pode ser obtida simplesmente somando os valores correspondentes nessa tabela. No entanto, a deflexão máxima da viga da Fig. 9.33 *não pode* ser obtida somando-se as deflexões máximas dos casos 5 e 6, pois essas deflexões ocorrem em diferentes pontos da viga.†

9.8. Aplicação da superposição para vigas estaticamente indeterminadas

Frequentemente, achamos mais conveniente usar o método da superposição para determinar as reações nos apoios de uma viga estaticamente indeterminada. Considerando primeiro o caso de uma viga indeterminada com um grau de indeterminação (Seção 9.5), como a viga da Fig. 9.35, seguimos a abordagem descrita na Seção 2.9. Escolhemos uma das reações como redundante e eliminamos ou modificamos de modo conveniente o apoio correspondente. A reação redundante é tratada então como uma força desconhecida que, juntamente com as outras, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais. A inclinação ou a deflexão no ponto em que o apoio foi modificado ou eliminado é obtida calculando-se separadamente as deformações provocadas pelas forças dadas e pela reação redundante, e superpondo os resultados obtidos. Uma vez determinadas as reações nos apoios, a inclinação e a deflexão podem ser estabelecidas de maneira usual em qualquer outro ponto da viga.

Fig. 9.35 As vigas contínuas que suportam este viaduto têm três apoios e são, portanto, indeterminadas.

†Um valor aproximado para a deflexão máxima da viga pode ser obtido criando-se um gráfico dos valores de y correspondentes a vários valores de x. Para a determinação da localização exata e valor da deflexão máxima, seria necessário compor a expressão para um resultado igual a zero obtida para a inclinação da viga e resolver essa equação para x.

EXEMPLO 9.8

Para a viga prismática e o carregamento mostrados na Fig. 9.36, determine as reações de apoio. (Essa é a mesma viga e o carregamento do Exemplo 9.5 da Seção 9.5.)

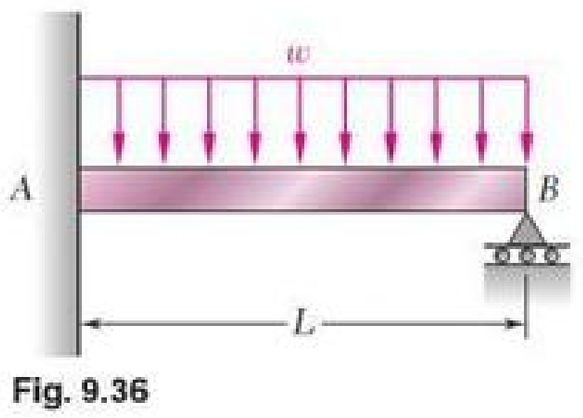


Fig. 9.36

Consideramos a reação em B como redundante e liberamos a viga do apoio. A reação $\mathbf{R}_B$ é agora considerada uma força desconhecida (Fig. 9.37*a*) e será determinada com base na condição de que a deflexão da viga em B deve ser zero.

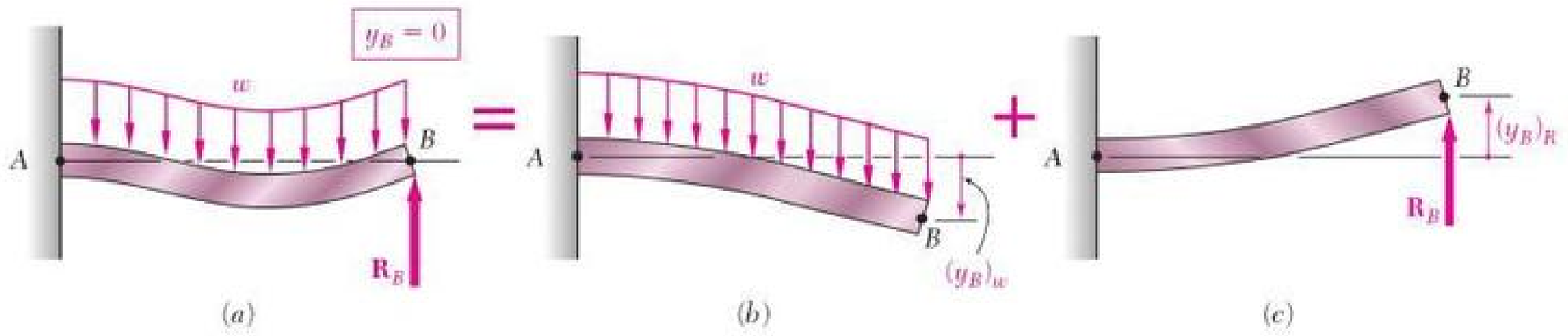


Fig. 9.37

A solução é obtida considerando-se separadamente a deflexão $(y_B)_w$ originada em B pela força w uniformemente distribuída (Fig. 9.37*b*) e a deflexão $(y_B)_R$ produzida no mesmo ponto pela reação redundante $\mathbf{R}_B$ (Fig. 9.37*c*).

Da tabela do Apêndice D (casos 2 e 1), concluímos que

$$(y_B)_w = -\frac{wL^4}{8EI} \qquad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Deve-se tomar cuidado para distinguir entre o desvio tangencial de C em relação a D, representado por $t_{C/D}$, e o desvio tangencial de D em relação a C, representado por $t_{D/C}$. O desvio tangencial $t_{D/C}$ representa a distância vertical de D até a tangente à linha elástica em C, e é obtido multiplicando-se a área sob o diagrama (M/EI) pela distância $\bar{x}_2$ de seu centroide até o eixo vertical que passa pelo ponto D (Fig. 9.45*b*).

$$t_{D/C} = (\text{área entre } C \text{ e } D)\,\bar{x}_2 \tag{9.60}$$

Observamos que, se uma área sob o diagrama (M/EI) está localizada acima do eixo x, seu primeiro momento em relação a um eixo vertical será positivo; se ela estiver localizada abaixo do eixo x, seu primeiro momento será negativo. Constatamos pela Fig. 9.45 que um ponto com um desvio tangencial *positivo* está localizado *acima* da tangente correspondente, enquanto um ponto com um desvio tangencial *negativo* estaria localizado *abaixo* da tangente.

*9.10. Aplicação em vigas em balanço e em vigas com carregamentos simétricos

Recordamos que o teorema do primeiro momento de área deduzido na seção anterior define o ângulo $\theta_{D/C}$ *entre* as tangentes em dois pontos C e D da linha elástica. Assim, o ângulo θ_D que a tangente em D forma com a horizontal, isto é, a inclinação em D, pode ser obtido somente se a inclinação em C for conhecida. Da mesma forma, o teorema do segundo momento de área define a distância vertical de um ponto da linha elástica desde a tangente até outro ponto. O desvio tangencial $t_{D/C}$ nos ajudará a localizar o ponto D somente se a tangente em C for conhecida. Concluímos que os dois teoremas do momento de área podem ser aplicados efetivamente na determinação das inclinações e das deflexões somente se uma certa *tangente de referência* à linha elástica tiver sido primeiro determinada.

No caso de uma *viga em balanço* (Fig. 9.46), a tangente à linha elástica na extremidade engastada A é conhecida e pode ser usada como a tangente de referência. Como $\theta_A = 0$, a inclinação da viga em qualquer ponto D é $\theta_D = \theta_{D/A}$ e pode ser obtida pelo teorema do primeiro momento de área. No entanto, a deflexão y_D do ponto D é igual ao desvio tangencial $t_{D/A}$ medido a partir da tangente de referência em A e pode ser obtida pelo teorema do segundo momento de área.

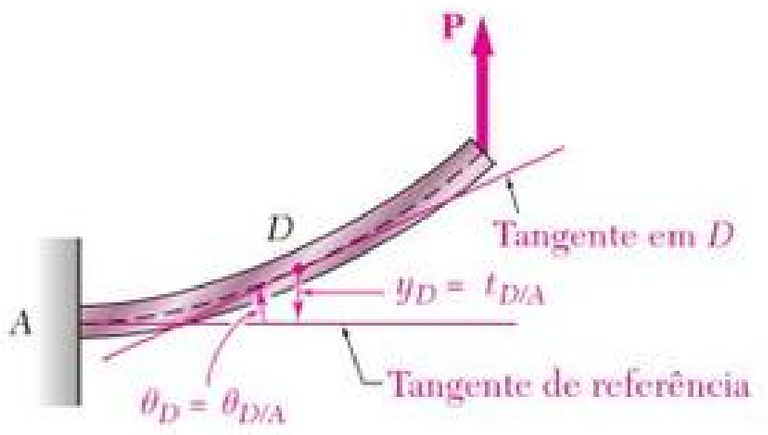
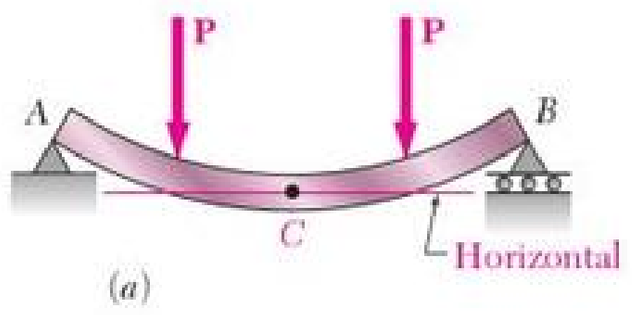
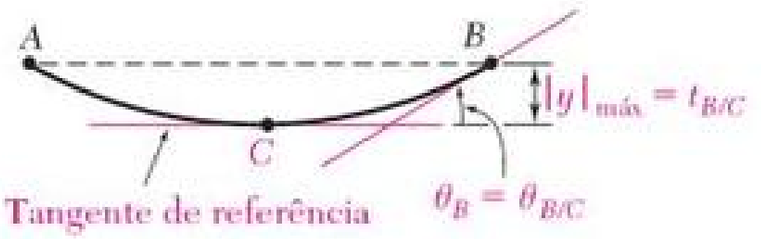


Fig. 9.46

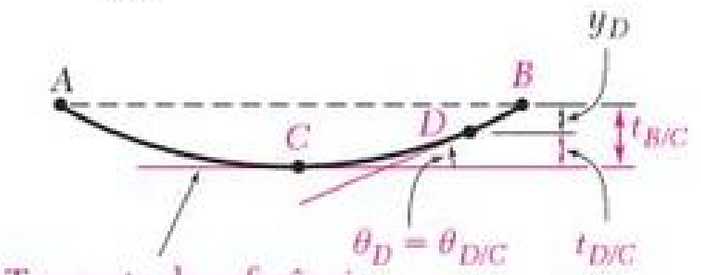
No caso de uma viga biapoiada AB com um *carregamento simétrico* (Fig. 9.47*a*) ou no caso de uma viga simétrica biapoiada com balanço sob um carregamento simétrico (ver o Problema Resolvido 9.11), a tangente no centro C da viga deve ser horizontal por razões de simetria e pode ser usada como a tangente de referência (Fig. 9.47*b*). Como $\theta_C = 0$, a inclinação no apoio B é $\theta_B = \theta_{B/C}$ e pode ser obtida pelo teorema do primeiro momento de área. Observamos também que $|y|_{\text{máx}}$ é igual ao desvio tangencial $t_{B/C}$ e pode, portanto, ser obtido pelo teorema do segundo momento de área. A inclinação em qualquer outro ponto D da viga (Fig. 9.47*c*) é encontrada de uma forma similar, e a deflexão em D pode ser expressa como $y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$.



(*a*)



(*b*)



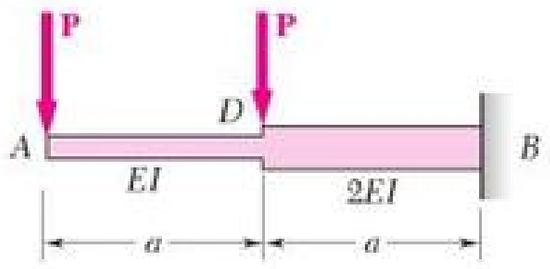
(*c*)

Fig. 9.47

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

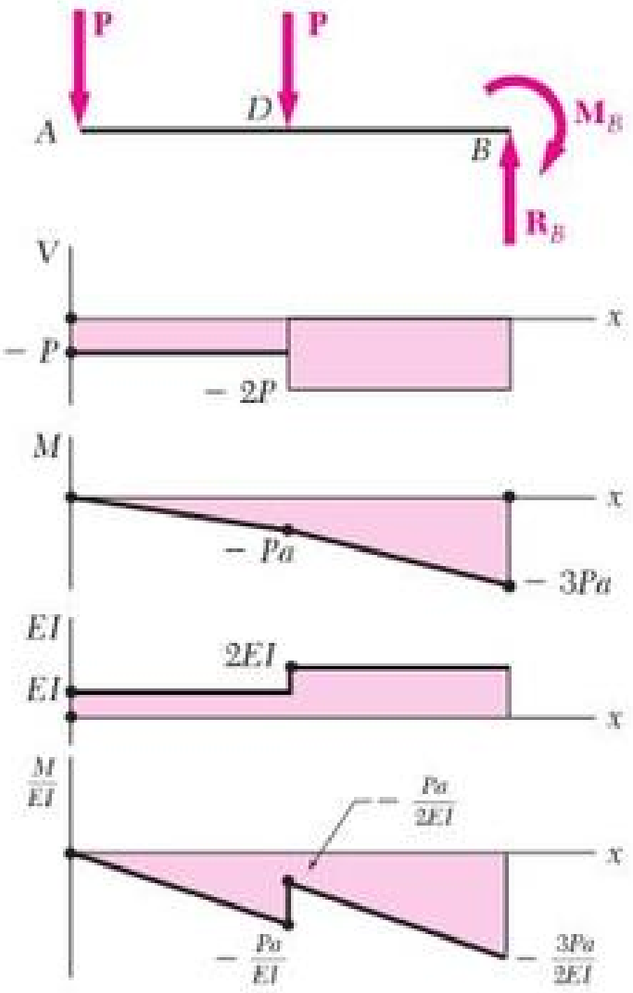
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 9.10

As barras prismáticas AD e DB são soldadas para formar a viga em balanço ADB. Sabendo que a rigidez à flexão é EI na parte AD da viga e $2EI$ na parte DB, determine, para o carregamento mostrado na figura, a inclinação e deflexão na extremidade A.

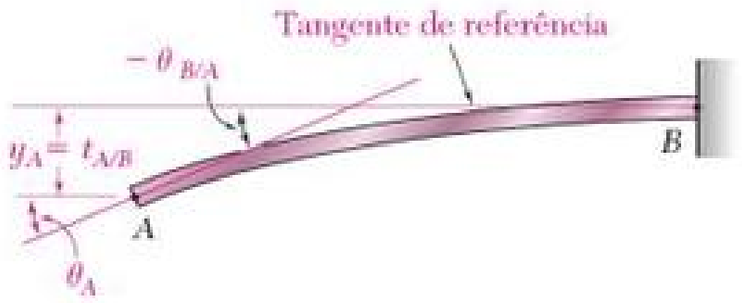


SOLUÇÃO

Diagrama *(M/EI)*. Primeiro desenhamos o diagrama do momento fletor para a viga e depois obtemos o diagrama (M/EI) dividindo o valor de M em cada ponto da viga pelo valor correspondente da rigidez à flexão.

Tangente de referência. Escolhemos a tangente horizontal na extremidade engastada B como tangente de referência. Como $\theta_B = 0$ e $y_B = 0$, observamos que

$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$

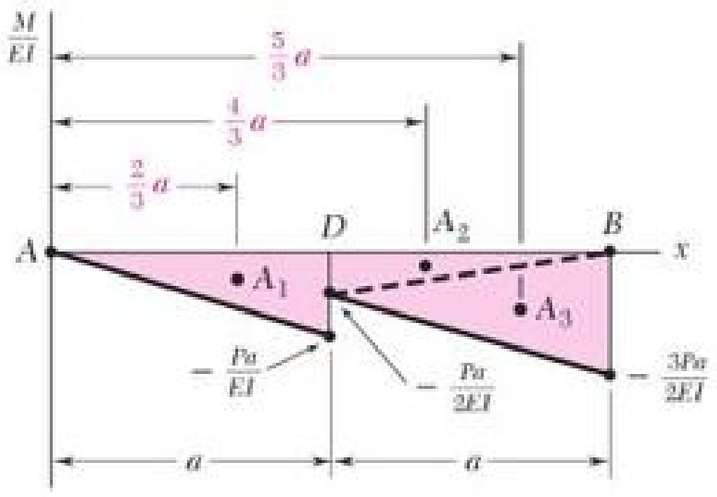


Inclinação em *A*. Dividindo o diagrama (M/EI) nas três partes triangulares mostradas, escrevemos

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$



Utilizando o teorema do primeiro momento de área, temos

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI}\measuredangle \blacktriangleleft$$

Deflexão em *A*. Utilizando o teorema do segundo momento de área, temos

$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right)$$

$$= \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI}\downarrow \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

9.118 e 9.119 Para a viga e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio da viga. Use $E = 200$ GPa.

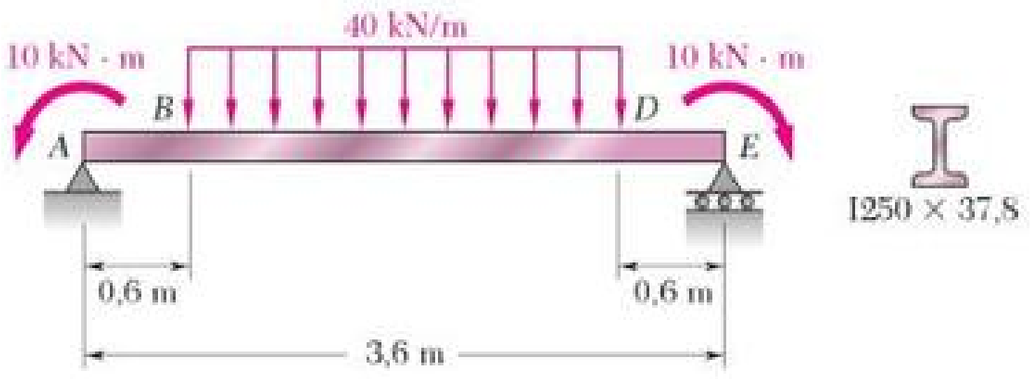


Fig. P9.118

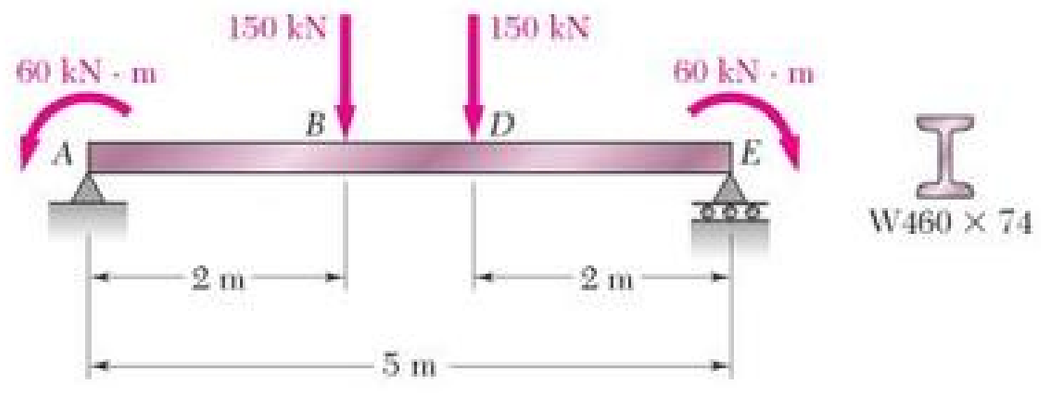


Fig. P9.119

9.120 Para a viga e o carregamento do Problema 9.117, determine (*a*) a força **P** para a qual a deflexão é zero no ponto médio *C* da viga e (*b*) a deflexão correspondente na extremidade *A*. Use $E = 200$ GPa.

9.121 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, e sabendo que $w = 8$ kN/m, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto médio *C*. Use $E = 200$ GPa.

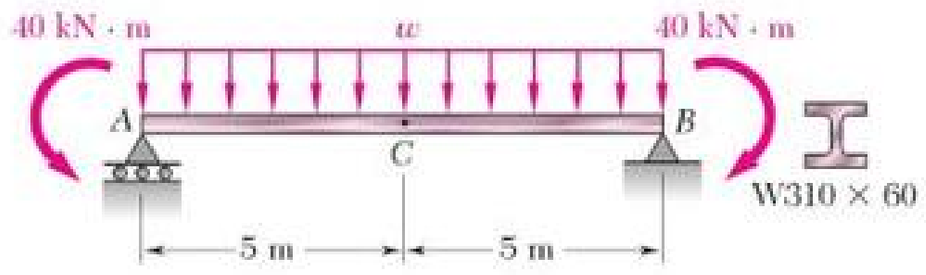


Fig. P9.121 e P9.122

9.122 Para a viga e o carregamento mostrados, determine o valor de *w* para o qual a deflexão é zero no ponto médio *C* da viga. Use $E = 200$ GPa.

***9.123** Uma barra uniforme *AE* deve ser apoiada em dois pontos *B* e *D*. Determine a distância *a* para a qual a inclinação nas extremidades *A* e *E* seja zero.

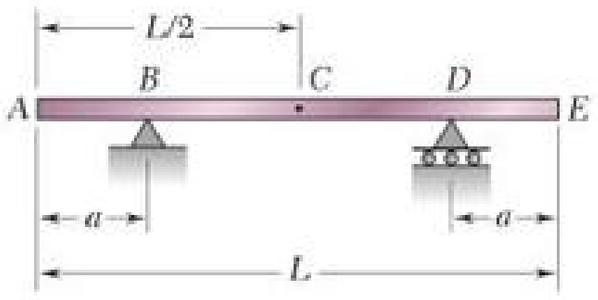


Fig. P9.123 e P9.124

***9.124** Uma barra uniforme *AE* deve ser apoiada em dois pontos *B* e *D*. Determine a distância *a* das extremidades da barra até os pontos de apoio, se as deflexões para baixo nos pontos *A*, *C* e *E* devem ser iguais.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

*9.14. Aplicação dos teoremas de momento de área em vigas estaticamente indeterminadas

As reações nos apoios de uma viga estaticamente indeterminada podem ser determinadas pelo método do momento de área de maneira muito semelhante àquela descrita na Seção 9.8. Por exemplo, no caso de uma viga indeterminada com um grau de indeterminação, escolhemos uma das reações como redundante e eliminamos ou modificamos adequadamente o apoio correspondente. A reação redundante é então tratada como uma força desconhecida que, juntamente com outras forças, deve produzir deformações compatíveis com os apoios originais. A condição de compatibilidade geralmente é expressa escrevendo-se que o desvio tangencial de um apoio em relação a outro é zero ou tem um valor predeterminado.

São desenhados dois diagramas de corpo livre separados. Um mostra as *forças fornecidas e as reações correspondentes* nos apoios que não foram eliminados; o outro mostra *a reação redundante e as reações correspondentes* nos mesmos apoios (ver o Exemplo 9.14). É desenhado então um diagrama M/EI para cada um dos dois carregamentos, e são obtidos os desvios tangenciais desejados pelo teorema do segundo momento de área. Superpondo os resultados obtidos, expressamos a condição de compatibilidade exigida e determinamos a reação redundante. As outras reações são obtidas por meio do diagrama de corpo livre da viga, utilizando as equações da estática.

Uma vez determinadas as reações nos apoios, a inclinação e a deflexão podem ser obtidas pelo método do momento de área em qualquer outro ponto da viga.

EXEMPLO 9.14

Determine a reação nos apoios para a viga prismática e o carregamento mostrados na Fig. 9.71.

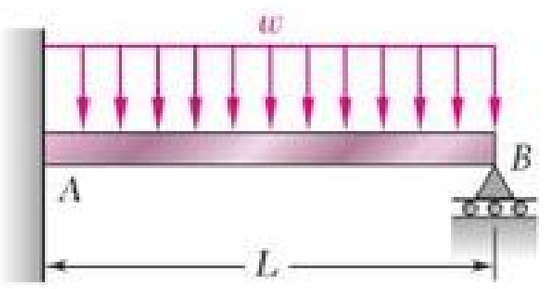


Fig. 9.71

Consideramos o momento aplicado na extremidade engastada A como redundante e substituímos a extremidade engastada por um apoio fixo. O momento $\mathbf{M}_A$ é considerado agora um carregamento desconhecido (Fig. 9.72*a*) e será determinado com base na condição de que a tangente à viga em A deve ser horizontal. Conclui-se que essa tangente deve passar pelo apoio B e, portanto, que o desvio tangencial $t_{B/A}$ de B com relação a A deve ser zero. A solução é encontrada calculando-se separadamente o desvio tangencial $(t_{B/A})_w$ provocado pela força uniformemente distribuída w (Fig. 9.72*b*) e o desvio tangencial $(t_{B/A})_M$ produzido pelo momento desconhecido $\mathbf{M}_A$ (Fig. 9.72*c*).

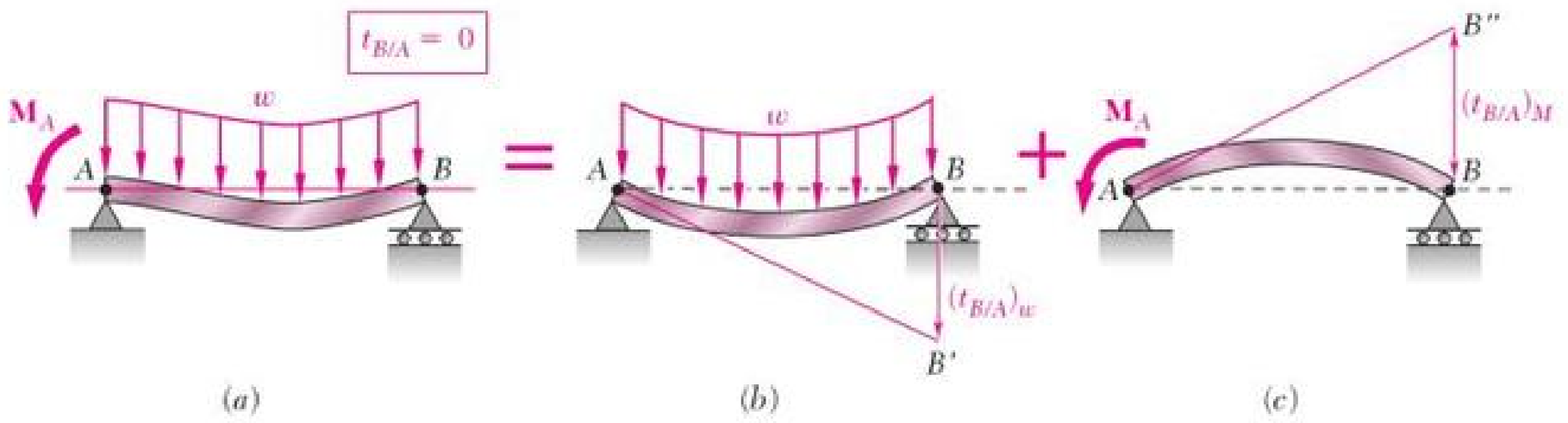


Fig. 9.72

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

PROBLEMAS

Utilize o método dos momentos de área para resolver os problemas seguintes.

9.125 até *9.128* Para a viga prismática e o carregamento mostrados nas figuras, determine (*a*) a deflexão no ponto *D* e (*b*) a inclinação na extremidade *A*.

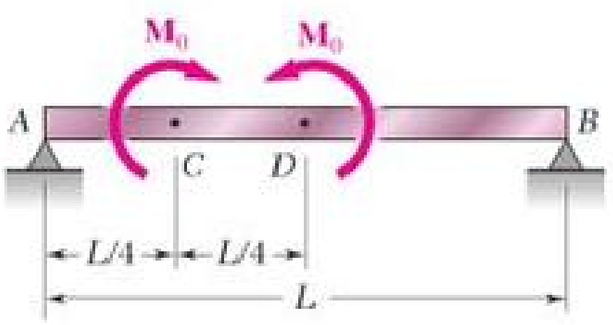


Fig. P9.125

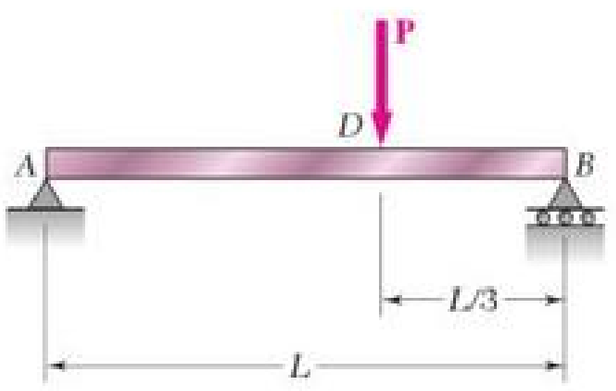


Fig. P9.126

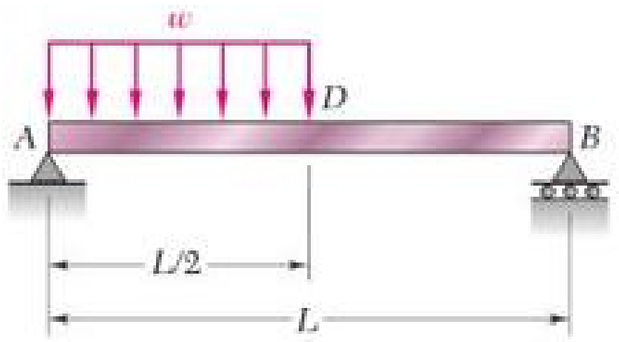


Fig. P9.127

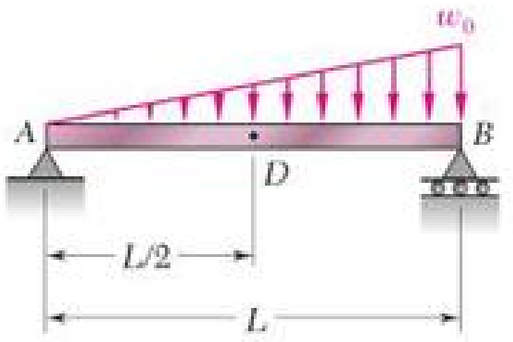


Fig. *P9.128*

9.129 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

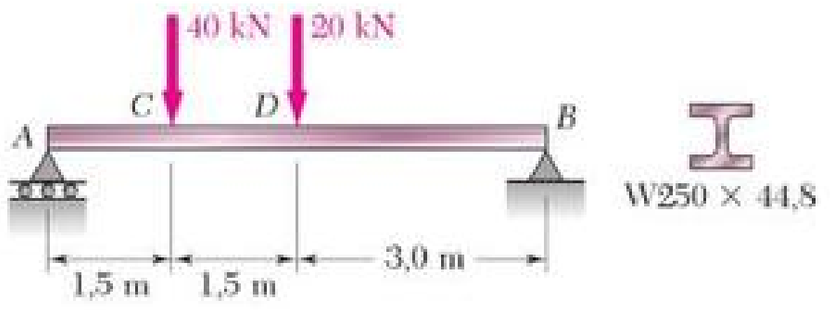


Fig. P9.129

9.130 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação na extremidade *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 200$ GPa.

9.131 Para a viga de madeira e o carregamento mostrados na figura, determine (*a*) a inclinação no ponto *A* e (*b*) a deflexão no ponto *D*. Use $E = 11{,}72$ GPa.

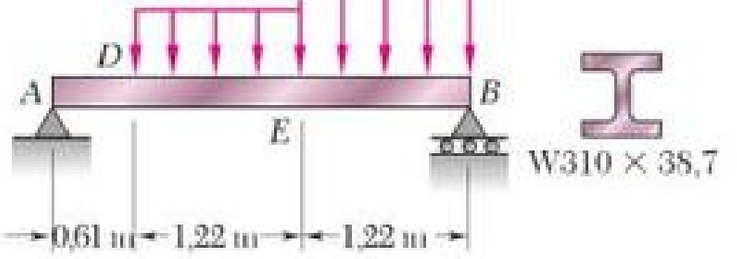


Fig. P9.130

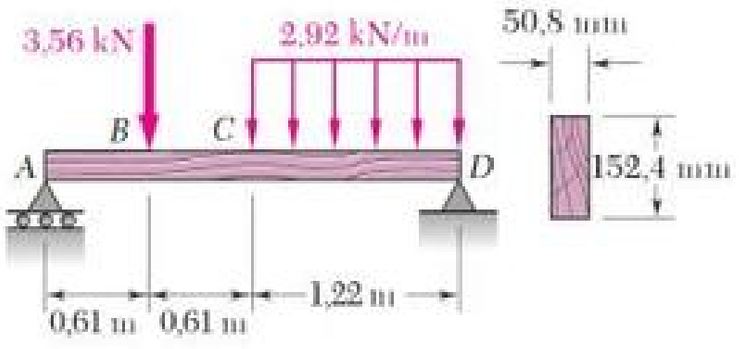


Fig. *P9.131*

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

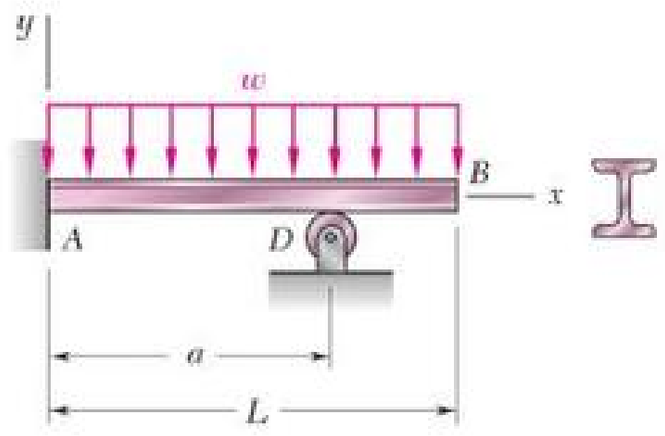


Fig. P9.C5

9.C5 Os apoios da viga AB consistem em um engastamento fixo na extremidade A e um apoio móvel localizado no ponto D. Elabore um programa de computador que possa ser utilizado para calcular a inclinação e a deflexão na extremidade livre da viga para valores de a de 0 a L usando os incrementos Δa dados. Aplique esse programa para calcular a inclinação e a deflexão no ponto B para cada um dos seguintes casos:

	L	Δa	w	E	Forma
(a)	3657,6 mm	152,4 mm	23,3 kN/m	200 GPa	W410 × 85
(b)	3 m	0,2 m	18 kN/m	200 GPa	W460 × 113

9.C6 Para a viga e o carregamento mostrados na figura, use o *Método dos Momentos de Área* para elaborar um programa de computador para calcular a inclinação e a deflexão em pontos ao longo da viga de $x = 0$ a $x = L$ usando os incrementos Δx dados. Aplique esse programa para calcular a inclinação e a deflexão para cada posição da força concentrada para a viga (a) do Problema 9.77 com $\Delta x = 0{,}5$ m e (b) do Problema 9.119 com $\Delta x = 0{,}5$ m.

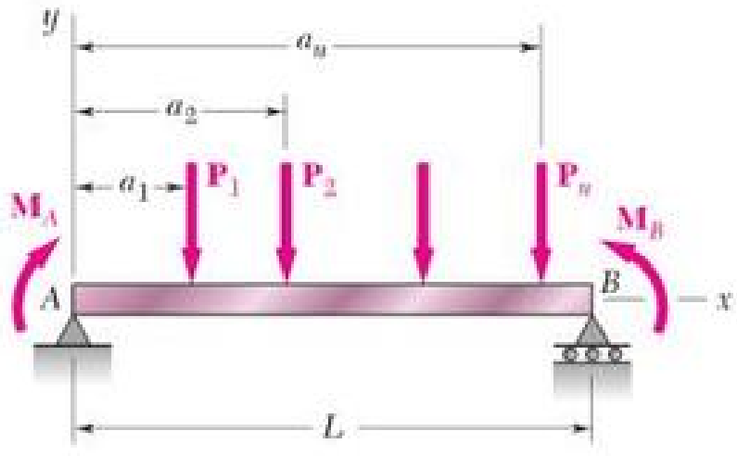


Fig. P9.C6

9.C7 Duas forças de 52 kN são mantidas afastadas de 2,5 m enquanto movem-se lentamente pela viga AB. Elabore um programa de computador para calcular a deflexão no ponto médio C da viga para valores de x desde 0 até 9 m, usando incrementos de 0,5 m. Use $E = 200$ GPa.

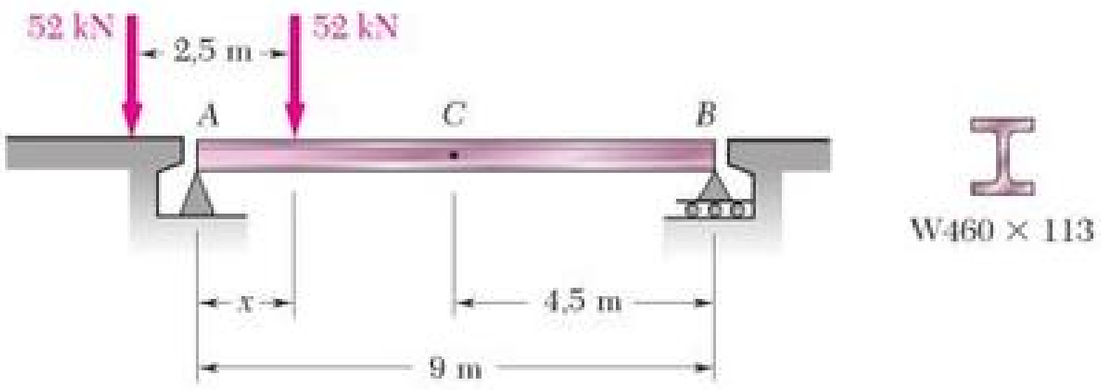


Fig. P9.C7

9.C8 Uma força uniformemente distribuída w e várias forças concentradas P_i podem ser aplicadas à viga em balanço AB. Elabore um programa de computador para determinar a reação no apoio móvel e aplique-o à viga e ao carregamento (a) do Problema 9.53a e (b) do Problema 9.154.

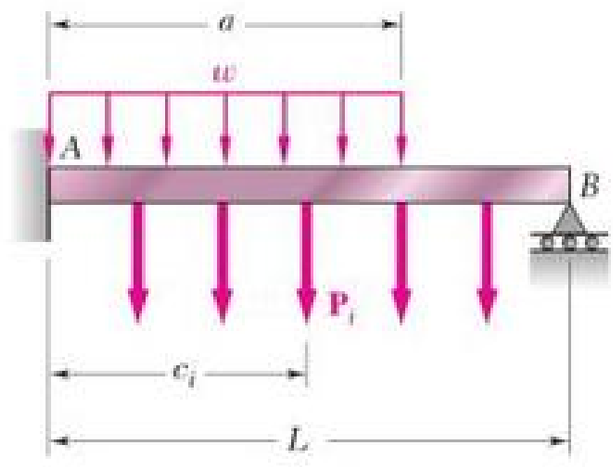


Fig. P9.C8

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

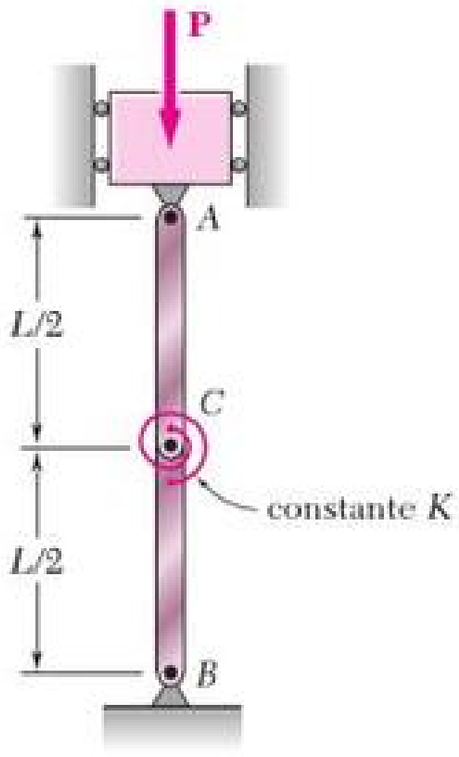


Fig. 10.4

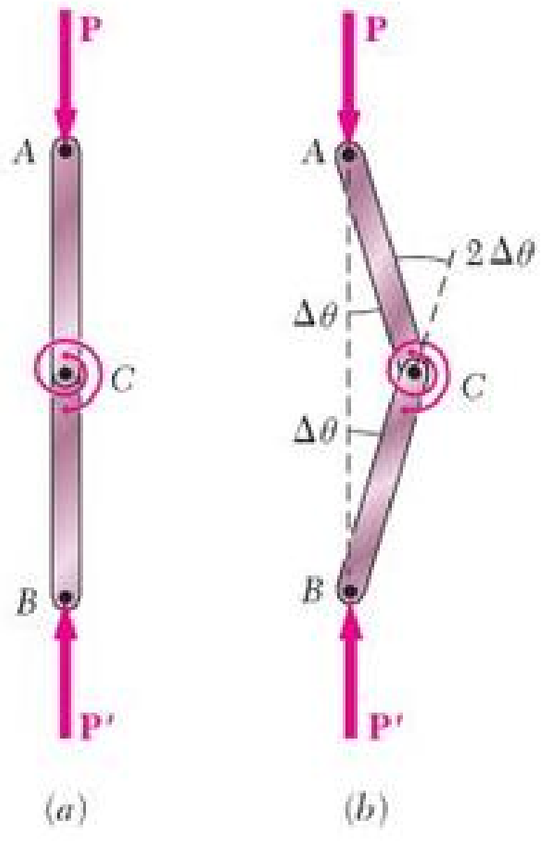


Fig. 10.5

Se as duas barras e as duas forças **P** e **P′** estiverem perfeitamente alinhadas, o sistema permanecerá na posição de equilíbrio mostrada na Fig. 10.5*a* enquanto não for perturbado. Mas suponha que movamos *C* ligeiramente para a direita, de maneira que cada barra forme agora um pequeno ângulo $\Delta\theta$ com a vertical (Fig. 10.5*b*). O sistema retornará à sua posição de equilíbrio original, ou ele se afastará ainda mais daquela posição? No primeiro caso, dizemos que o sistema é *estável* e, no segundo, que ele é *instável*.

Para determinar se o sistema constituído de duas barras é estável ou instável, consideramos os esforços que atuam na barra *AC* (Fig. 10.6). Esses esforços consistem em dois momentos, que são o formado por **P** e **P′** de momento $P(L/2)$ sen $\Delta\theta$, que tende a afastar a barra da linha vertical, e o momento **M** exercido pela mola, que tende a trazer a barra de volta para sua posição vertical original. Como o ângulo de deflexão da mola é $2\,\Delta\theta$, o momento **M** é $M = K(2\,\Delta\theta)$. Se o segundo momento for maior do que o primeiro, o sistema tende a retornar à sua posição original de equilíbrio; o sistema neste caso é estável. Se o primeiro momento for maior do que o do segundo, o sistema tende a se afastar de sua posição de equilíbrio original; o sistema neste caso é instável. O valor da carga para o qual os dois momentos se equilibram é chamado de *carga crítica* e é representado por P_{cr}. Temos

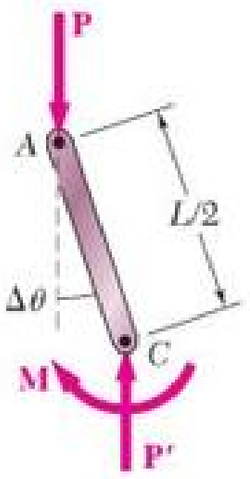


Fig. 10.6

$$P_{cr}(L/2)\ \text{sen}\ \Delta\theta = K(2\,\Delta\theta) \tag{10.1}$$

ou, como sen $\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$P_{cr} = 4K/L \tag{10.2}$$

Está claro que o sistema é estável para $P < P_{cr}$, ou seja, para valores da força menores do que o valor crítico, e instável para $P > P_{cr}$.

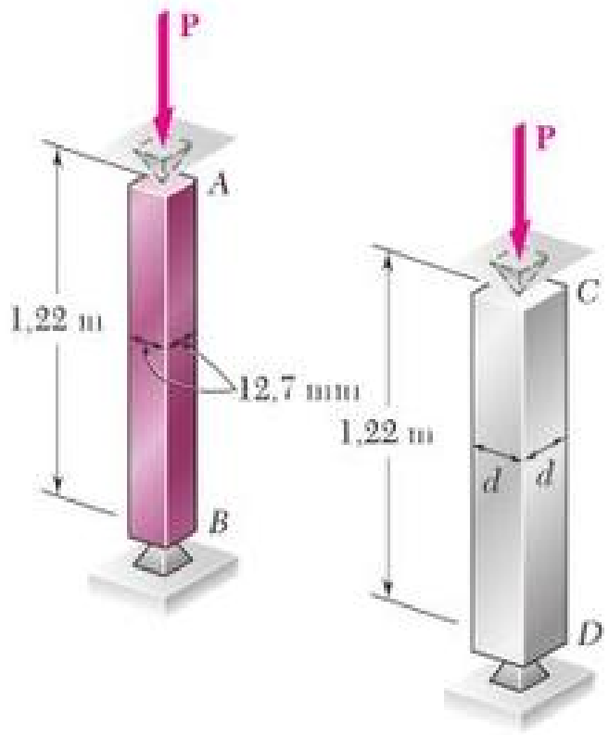
Vamos supor que a força $P > P_{cr}$ foi aplicada às duas barras da Fig. 10.4 e que o sistema foi perturbado. Como $P > P_{cr}$, o sistema se afastará da vertical e, após algumas oscilações, estabilizará em uma nova posição de equilíbrio

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

10.11 Determine a dimensão d para a qual as escoras de alumínio e de aço terão o mesmo peso e calcule para ambas o valor da carga crítica.



Aço
$E = 200$ GPa
$\rho = 7861$ kg/m^3

Alumínio
$E = 69{,}6$ GPa
$\rho = 2710$ kg/m^3

Fig. P10.11 e P 10.12

10.12 Determine (a) a carga crítica para a escora de aço, (b) a dimensão d para a qual ambas escoras tem a mesma carga crítica e (c) expresse em termos de porcentagem o peso da escora de alumínio em relação a escora de aço.

10.13 Um elemento comprimido com comprimento de flambagem de 1,5m consiste em uma barra de seção cheia, de latão, com 30 mm de diâmetro. Para reduzir o peso do elemento em 25%, a barra de seção cheia é substituída por uma barra de seção vazada como a seção transversal mostrada. Determine (a) a porcentagem de redução na força crítica e (b) o valor da força crítica para a barra de seção vazada. Use $E = 105$ GPa.

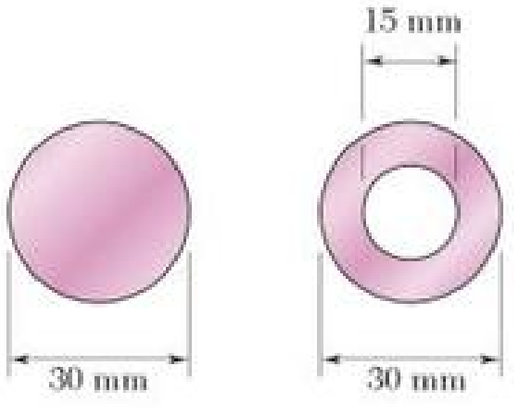


Fig. P10.13

10.14 Uma coluna de comprimento de flambagem L pode ser feita colando-se pranchas idênticas em um dos arranjos mostrados na figura. Determine a relação entre as forças críticas calculadas usando o arranjo a e o arranjo b.

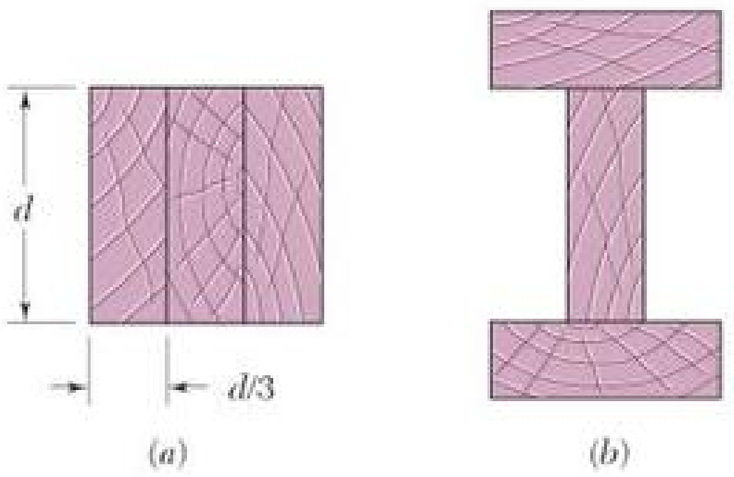


Fig. *P10.14*

10.15 A coluna de comprimento de flambagem igual a 6 m é formada por três chapas. Usando $E = 200$ GPa, determine o coeficiente de segurança à flambagem para a carga centrada de 16 kN.

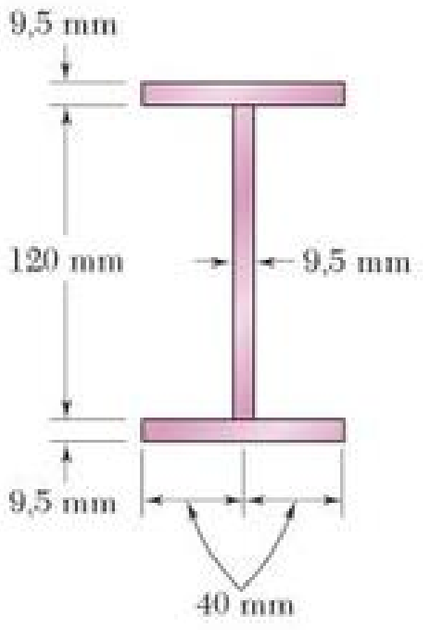


Fig. P10.15

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

10.107 Um elemento de compressão de seção transversal retangular tem um comprimento de flambagem de 914 mm e é feito com a liga de alumínio 2014-T6 para a qual a tensão admissível à flexão é de 165,5 MPa. Usando o método da interação, determine a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada quando $e = 10{,}16$ mm.

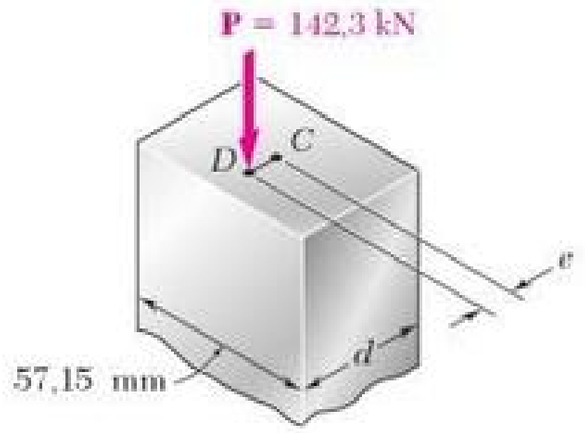


Fig. P10.107

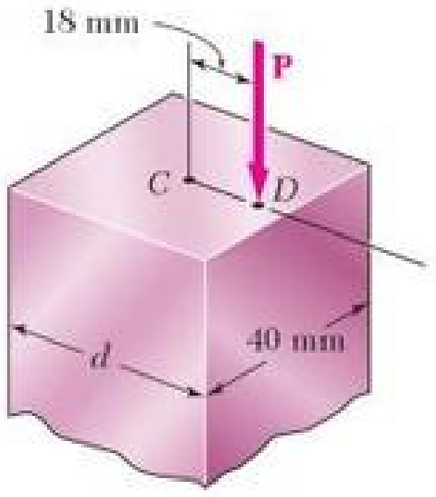


Fig. P10.109

10.108 Resolva o Problema 10.107 considerando que $e = 5{,}08$ mm.

10.109 Um elemento de compressão feito de aço tem um comprimento de flambagem de 720 mm e deve suportar a força **P** de 198 kN conforme mostra a figura. Para o material utilizado, $\sigma_E = 250$ MPa e $E = 200$ GPa e usando o método da interação com uma tensão admissível à flexão igual a 150 MPa, determine a menor dimensão d da seção transversal que pode ser usada.

10.110 Resolva o Problema 10.109 considerando que o comprimento de flambagem é de 1,62 m e que a intensidade P da força excêntrica é de 128 kN.

10.111 Um tubo de aço com diâmetro externo de 80 mm deve suportar uma força **P** de 93 kN com uma excentricidade de 20 mm. Sabendo que o estoque de tubos para utilização são feitos com espessuras de parede que variam em incrementos de 3 mm de 6 mm até 15 mm. Usando o Método das tensões admissíveis, determine o tubo mais leve que pode ser utilizado. Considere $E = 200$ GPa e $\sigma_E = 250$ MPa.

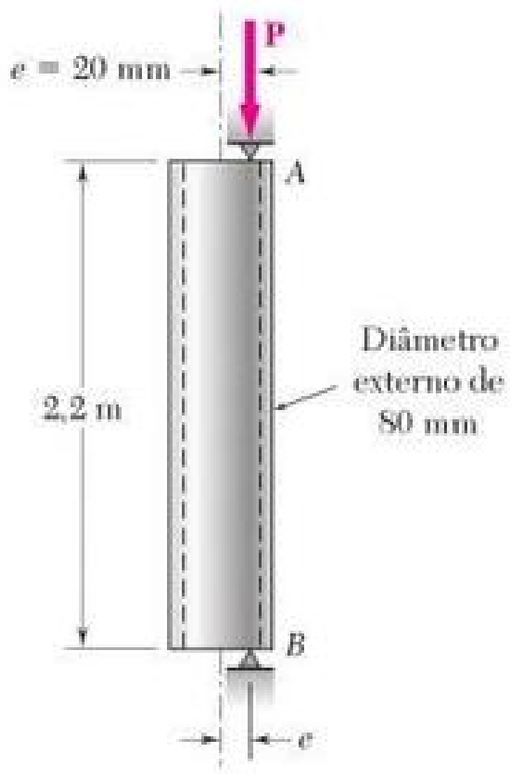


Fig. P10.111

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

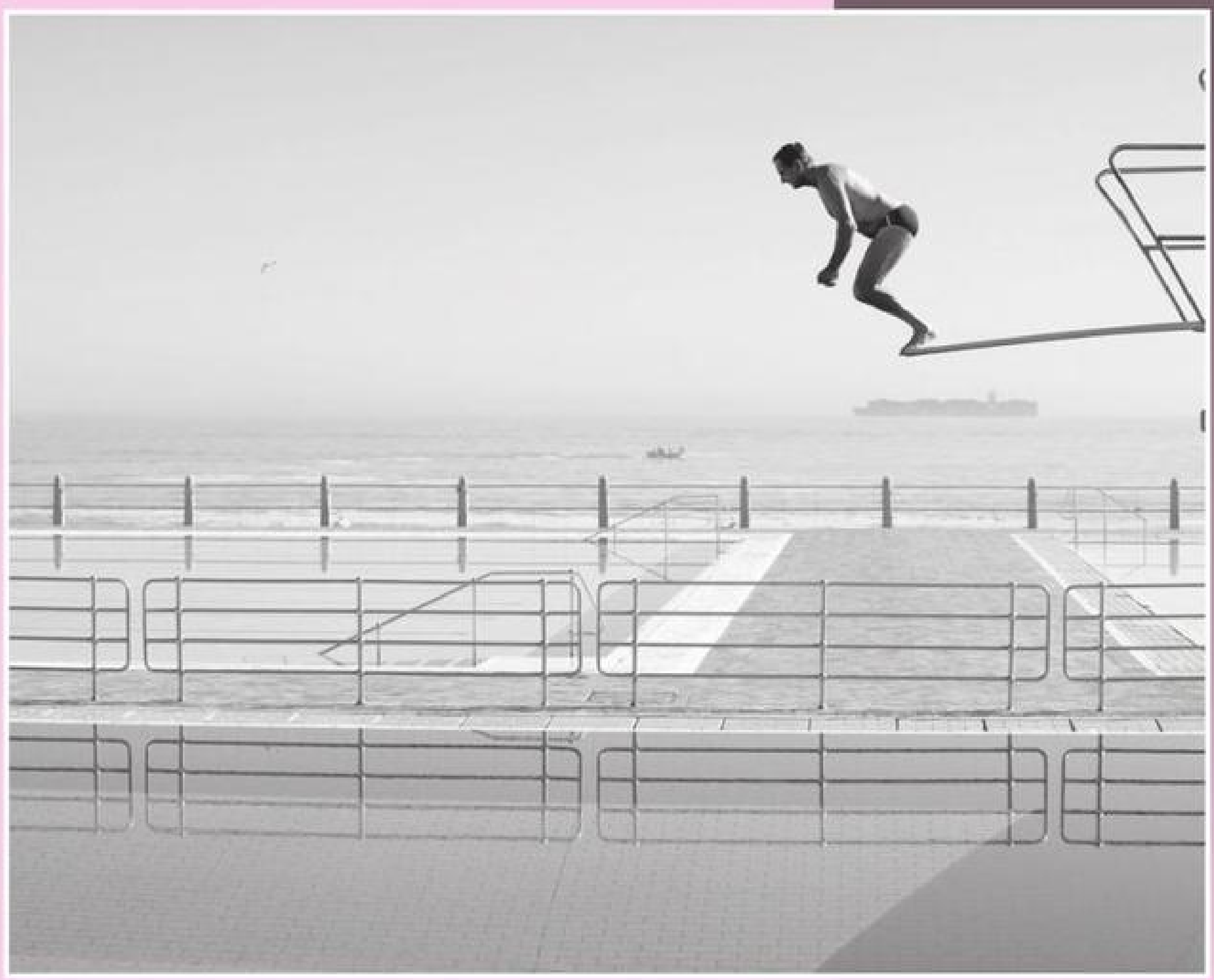
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

C A P Í T U L O

11

Métodos de energia



Quando o mergulhador flexiona o trampolim, a energia potencial causada por sua elevação acima do trampolim será convertida em energia de deformação devido à flexão do trampolim. As tensões normal e de cisalhamento resultantes das cargas de energia serão determinadas neste capítulo.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

Observando a Fig. 11.6, notamos que a densidade de energia de deformação u é igual à área sob a curva da tensão em função da deformação específica, medida desde $\epsilon_x = 0$ até $\epsilon_x = \epsilon_1$. Se o material é descarregado, a tensão retorna a zero, mas há uma deformação permanente representada pela deformação específica ϵ_p, e somente a parte da energia de deformação por unidade de volume correspondente à área triangular é recuperada. O restante da energia gasta na deformação do material é dissipada na forma de calor.

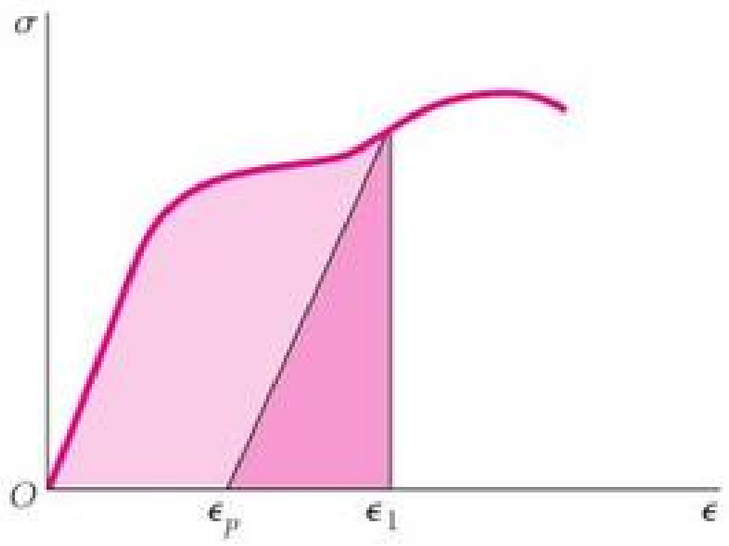


Fig. 11.6

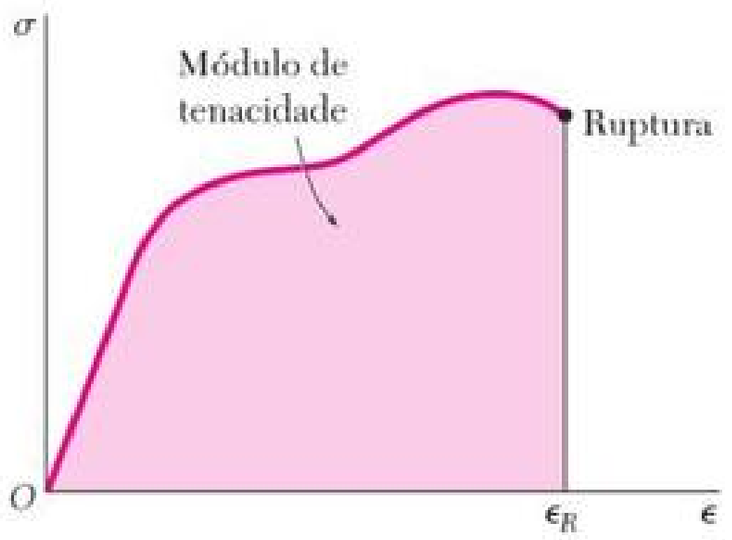


Fig. 11.7

O valor da densidade de energia de deformação obtida fazendo $\epsilon_1 = \epsilon_R$ na Equação (11.4), em que ϵ_R é a deformação específica na ruptura, é conhecido como *módulo de tenacidade* do material. Ele é igual à área total sob o diagrama tensão-deformação específica (Fig. 11.7) e representa a energia por unidade de volume necessária para fazer o material entrar em ruptura. Está claro que a tenacidade do material está relacionada com sua ductilidade, bem como a seu limite de resistência (Seção 2.3), e que a capacidade de uma estrutura para resistir a uma força de impacto depende da tenacidade do material utilizado (Fig. 11.8).

Fig. 11.8 O acoplador de vagões é feito de um aço dúctil que tem um grande módulo de tenacidade.

Se a tensão σ_x permanecer dentro do limite de proporcionalidade do material, aplica-se a lei de Hooke e escrevemos

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{11.5}$$

Substituindo σ_x de (11.5) em (11.4), temos

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x \, d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \tag{11.6}$$

ou, usando a Equação (11.5) para expressar $_1$ em termos da tensão σ_1 correspondente,

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11.7}$$

O valor u_E da densidade de energia de deformação obtido fazendo-se $\sigma_1 = \sigma_E$ na Equação (11.7), em que σ_E é a tensão de escoamento, é chamado de *módulo de resiliência* do material. Temos

$$u_E = \frac{\sigma_E^2}{2E} \tag{11.8}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 11.3

Determine a energia de deformação da viga prismática AB em balanço (Fig. 11.16), levando em conta apenas o efeito das tensões normais.

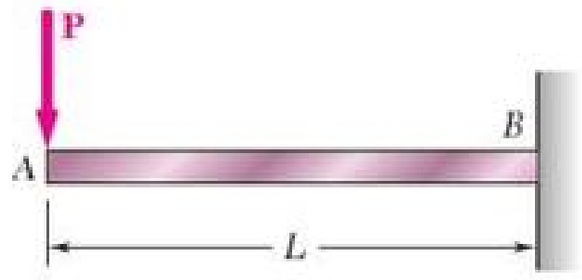


Fig. 11.16

O momento fletor a uma distância x da extremidade A é $M = -Px$. Substituindo essa expressão na Equação (11.17), escrevemos

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

11.5. Energia de deformação elástica para tensões de cisalhamento

Quando um material é submetido a um estado plano de tensão em cisalhamento puro τ_{xy}, a densidade de energia de deformação em um ponto pode ser expressa como

$$u = \int_0^{\gamma_u} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \tag{11.18}$$

em que γ_{xy} é a deformação de cisalhamento correspondente à tensão τ_{xy} (Fig. 11.17*a*). Notamos que a densidade de energia de deformação u é igual à área sob o diagrama tensão-deformação de cisalhamento (Fig. 11.17*b*).

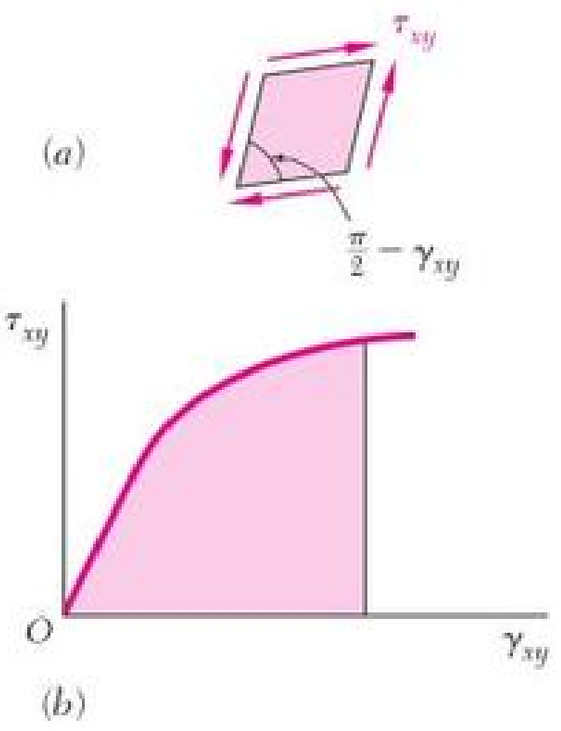


Fig. 11.17

Para valores de τ_{xy} dentro do limite de proporcionalidade, temos $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, em que G é o módulo de elasticidade transversal do material. Substituindo o valor de τ_{xy} na Equação (11.18) e fazendo a integração, escrevemos

$$u = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{11.19}$$

O valor da energia de deformação U de um corpo sujeito a um estado plano de tensão em cisalhamento puro pode ser obtido lembrando da Seção 11.4 que

$$u = \frac{dU}{dV} \tag{11.9}$$

Substituindo u da Equação (11.19) na Equação (11.9) e integrando ambos os membros, temos

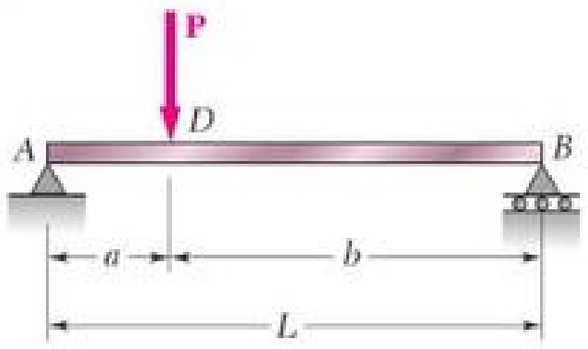
$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV \tag{11.20}$$

Essa expressão define a deformação elástica associada às deformações por cisalhamento do corpo. Assim como a expressão similar obtida na Seção 11.4 para tensões normais uniaxiais, ela é válida somente para deformações elásticas.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

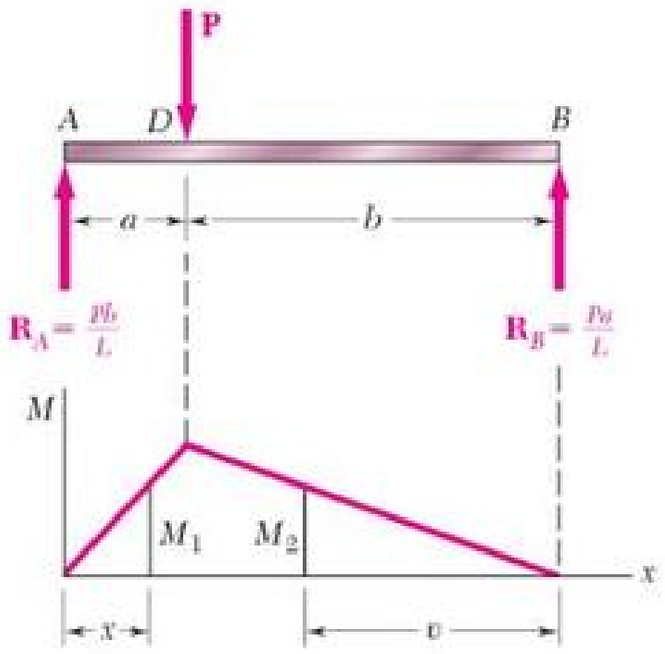
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 11.2

(*a*) Levando em conta apenas o efeito das tensões normais em virtude da flexão, determine a energia de deformação da viga prismática *AB* para o carregamento mostrado. (*b*) Avalie a energia de deformação, sabendo que a viga é um perfil W250 × 67, $P = 180$ kN, $L = 3{,}6$ m, $a = 0{,}9$ m, $b = 2{,}7$ m e $E = 200$ GPa.

SOLUÇÃO



Momento fletor. Usando o diagrama de corpo livre da barra inteira, determinamos as reações

$$\mathbf{R}_A = \frac{Pb}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{Pa}{L}\uparrow$$

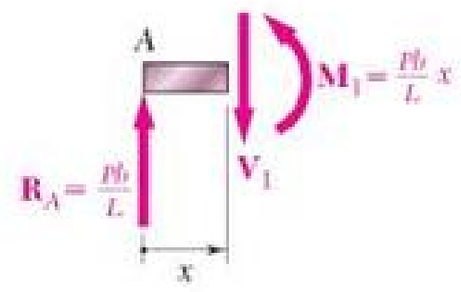
Para a parte *AD* da viga, o momento fletor é

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

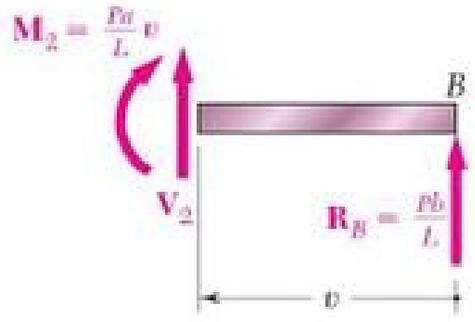
Para a parte *DB*, o momento fletor a uma distância v da extremidade *B* é

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

De *A* até *D*:



De *B* até *D*:



***a*. Energia de deformação.** Como a energia de deformação é uma grandeza escalar, somamos a energia de deformação da parte *AD* com a energia de deformação da parte *DB* para obter a energia de deformação total da viga. Usando a Equação (11.17), escrevemos

$$\begin{aligned} U &= U_{AD} + U_{DB} \\ &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}\,dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}\,dv \\ &= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv \\ &= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b) \end{aligned}$$

ou, como $(a + b) = L$,

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL}$$

***b*. Avaliação da energia de deformação.** O momento de inércia de um perfil de aço laminado W250 × 67 é obtido do Apêndice C. Este e os dados fornecidos são reproduzidos abaixo.

$$P = 180\text{ kN} \qquad L = 3{,}6\text{ m}$$
$$a = 0{,}9\text{ m} \qquad b = 2{,}7\text{ m}$$
$$E = 200\text{ GPa} = 200 \times 10^6\text{ kN/m}^2 \qquad I = 104 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Substituindo esses valores na expressão de U temos

$$U = \frac{(180\text{ kN})^2(0{,}9\text{ m})^2(2{,}7\text{ m})^2}{6(200 \times 10^6\text{ kN/m}^2)(104 \times 10^{-6}\text{ m}^4)(3{,}6\text{ m})}$$

$$U = 0{,}426\text{ kN} \cdot \text{m}$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

11.27 Considerando que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostre que para o carregamento indicado o valor máximo da densidade de energia de deformação na viga é

$$u_{máx} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

em que U é a energia de deformação da viga e V é o seu volume.

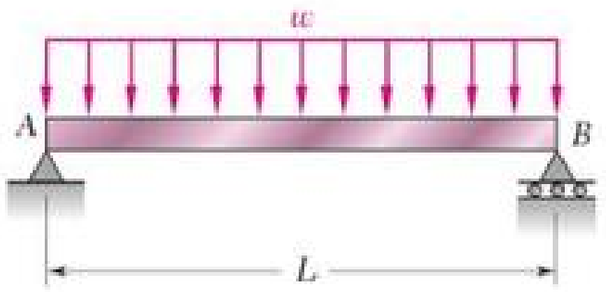


Fig. P11.27

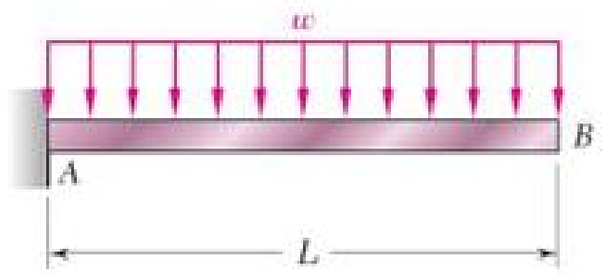


Fig. P11.28

11.28 Considerando que a viga prismática AB tem uma seção transversal retangular, mostre que para o carregamento indicado o valor máximo da densidade de energia de deformação na viga é

$$u_{máx} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

em que U é a energia de deformação da viga e V é seu volume.

11.29 e 11.31 Usando $E = 200$ GPa, determine a energia de deformação devido à flexão, para a barra de aço e o carregamento mostrado.

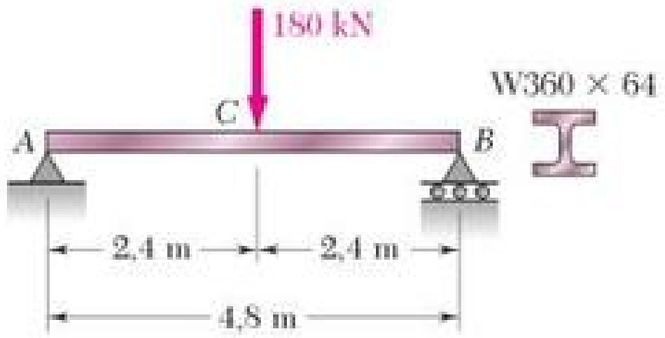


Fig. P11.29

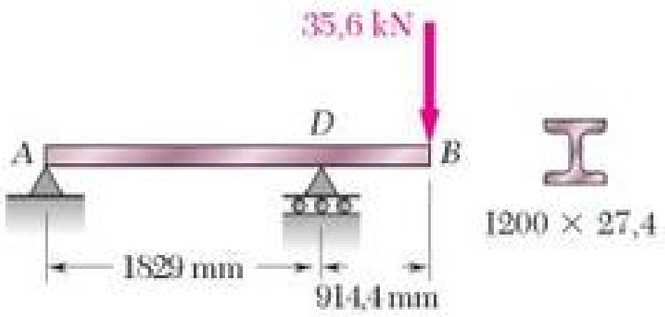


Fig. P11.30

11.30 e *11.32* Usando $E = 200$ GPa, determine a energia de deformação devido à flexão, para a barra de aço e o carregamento mostrado.

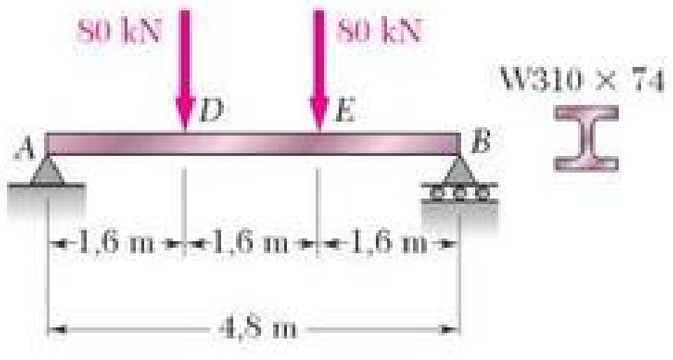


Fig. P11.31

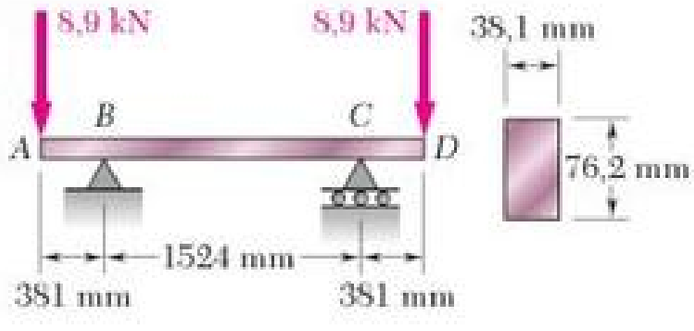
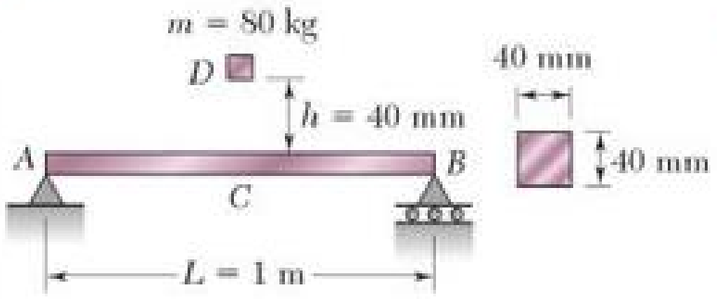


Fig. *P11.32*

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

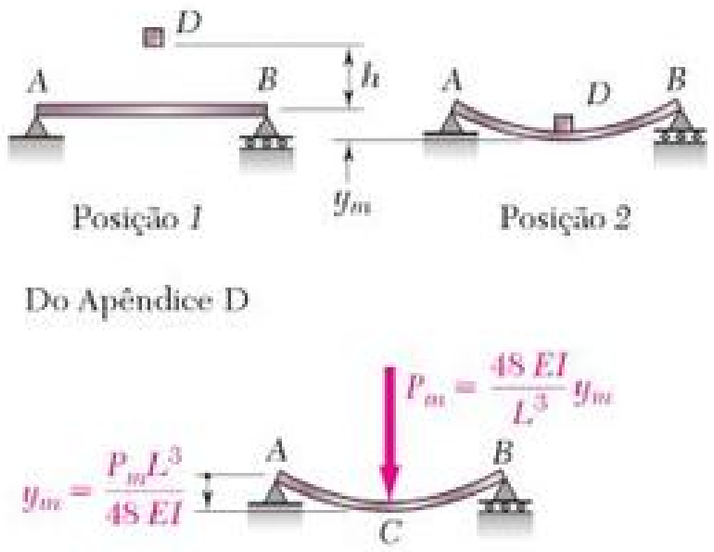
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 11.3

O bloco D de massa m é liberado do repouso e cai de uma altura h até atingir o ponto médio C da viga de alumínio AB. Usando $E = 73$ GPa, determine (*a*) a deflexão máxima do ponto C e (*b*) a tensão máxima que ocorre na viga.



SOLUÇÃO

Princípio de trabalho e energia. Como o bloco é liberado do repouso, notamos que na posição *1* tanto a energia cinética quanto a energia de deformação são iguais a zero. Na posição 2, em que ocorre a deflexão máxima y_m, a energia cinética é novamente igual a zero. Consultando a tabela de *Deflexões e inclinações de vigas* do Apêndice D, encontramos a expressão para y_m. A energia de deformação da viga na posição 2 é

$$U_2 = \frac{1}{2} P_m y_m = \frac{1}{2} \frac{48EI}{L^3} y_m^2 \qquad U_2 = \frac{24EI}{L^3} y_m^2$$

Observamos que o trabalho feito pelo peso **W** do bloco é $W(h + y_m)$. Igualando a energia de deformação da viga com o trabalho feito por **W**, temos

$$\frac{24EI}{L^3} y_m^2 = W(h + y_m) \tag{1}$$

***a*. Deflexão máxima do ponto *C*.** Dos dados fornecidos temos

$$EI = (73 \times 10^9 \text{ Pa})\tfrac{1}{12}(0{,}04 \text{ m})^4 = 15{,}573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$L = 1 \text{ m} \qquad h = 0{,}040 \text{ m} \qquad W = mg = (80 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 784{,}8 \text{ N}$$

Substituindo na Equação (1), obtemos e resolvemos a equação quadrática

$$(373{,}8 \times 10^3) y_m^2 - 784{,}8 y_m - 31{,}39 = 0 \qquad y_m = 10{,}27 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*. Tensão máxima.** O valor de P_m é

$$P_m = \frac{48EI}{L^3} y_m = \frac{48(15{,}573 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m})}{(1 \text{ m})^3}(0{,}01027 \text{ m}) \qquad P_m = 7677 \text{ N}$$

Lembrando que $\sigma_m = M_{\text{máx}} c/I$ e $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4} P_m L$, escrevemos

$$\sigma_m = \frac{(\frac{1}{4} P_m L)c}{I} = \frac{\frac{1}{4}(7677 \text{ N})(1 \text{ m})(0{,}020 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0{,}040 \text{ m})^4} \qquad \sigma_m = 179{,}9 \text{ MPa} \blacktriangleleft$$

Uma aproximação do trabalho feito pelo peso do bloco pode ser obtida omitindo-se y_m do lado direito da Equação (1), como foi feito no Exemplo 11.7. Se essa aproximação for usada aqui, encontramos $y_m = 9{,}16$ mm; o erro é de 10,8%. No entanto, se um bloco de 8 kg for solto de uma altura de 400 mm, produzindo o mesmo valor de Wh, omitir y_m do lado direito da Equação (1) resulta em um erro de somente 1,2%. Uma discussão mais detalhada dessa aproximação é dada no Problema 11.70.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

11.68 Dois eixos de aço, ambos com diâmetro de 19,1 mm, estão conectados às engrenagens mostradas na figura. Sabendo que $G = 77{,}2$ GPa e que o eixo DF está fixo em F, determine o ângulo de rotação da extremidade A quando lhe é aplicado um torque de 84,7 N · m em A. Ignore a energia de deformação em virtude da flexão dos eixos.

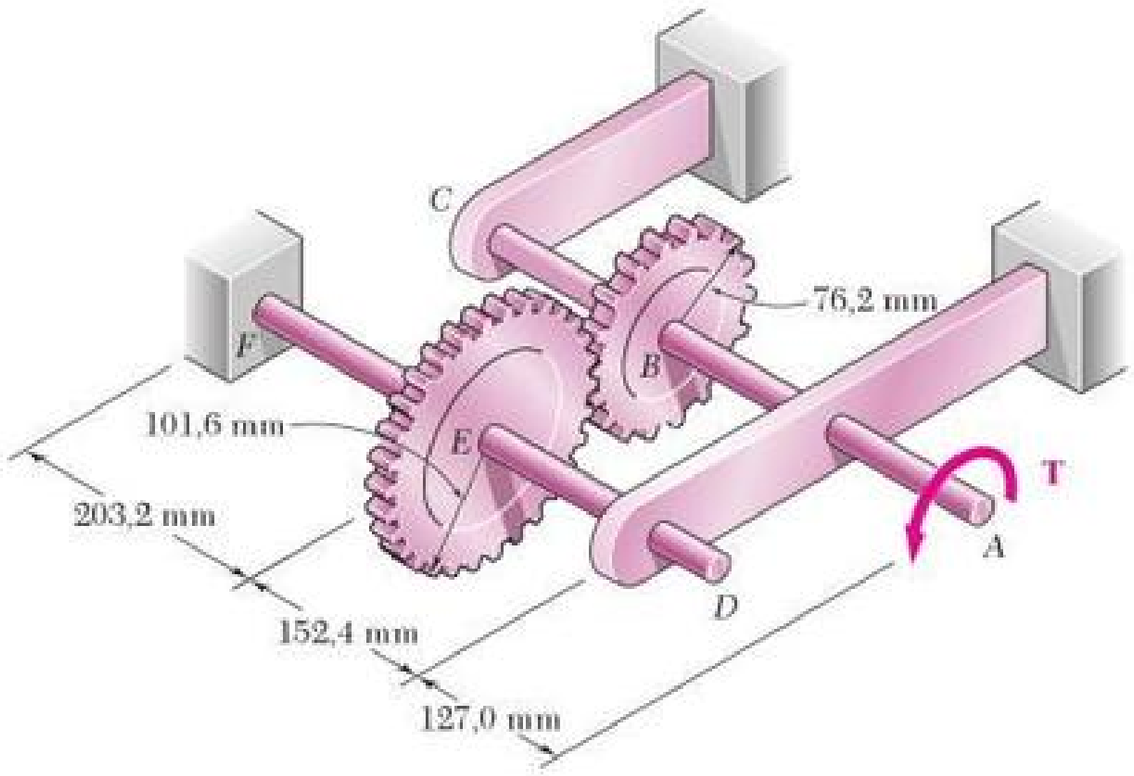


Fig. *P11.68*

11.69 A barra de aço CD, com 20 mm de diâmetro, está soldada ao eixo de aço AB também com 20 mm de diâmetro conforme mostrado. A extremidade C da barra CD toca a superfície rígida mostrada quando um conjugado T_B é aplicado a um disco fixado ao eixo AB. Sabendo que os mancais são auto-alinhados e não exercem conjugados sobre o eixo, determine o ângulo de rotação do disco quando $T_B = 400$ N · m. Utilize $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa. (Considere a energia de deformação devido a ambos efeitos de flexão e torção no eixo AB e de flexão no braço CD.)

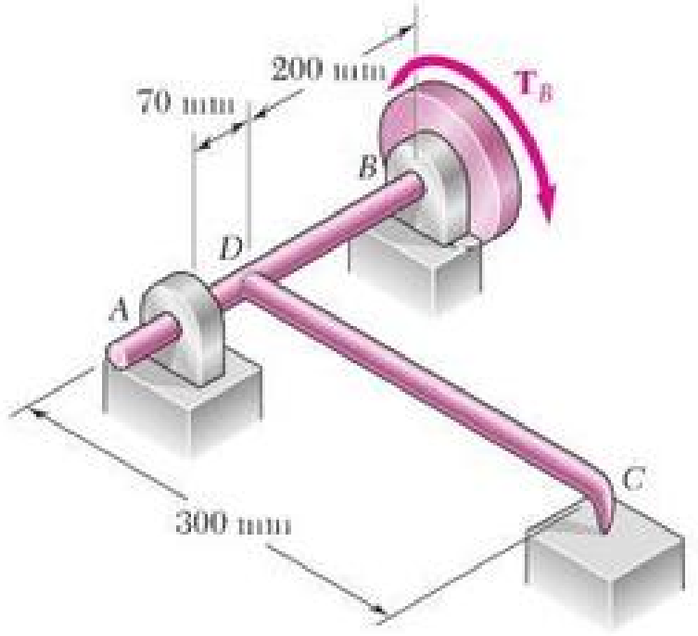


Fig. P11.69

11.70 A barra de seção vazada de parede fina AB tem uma seção transversal não circular com espessura de parede não uniforme. Usando a expressão dada na Equação (3.53) da Seção 3.13 e a expressão para a densidade de energia de deformação dada na Equação (11.19), mostre que o ângulo de torção do elemento AB é

$$\phi = \frac{TL}{4\mathcal{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

em que ds é o comprimento da linha de esqueleto da seção transversal e $\mathcal{A}$ é a área limitada por aquela linha de esqueleto.

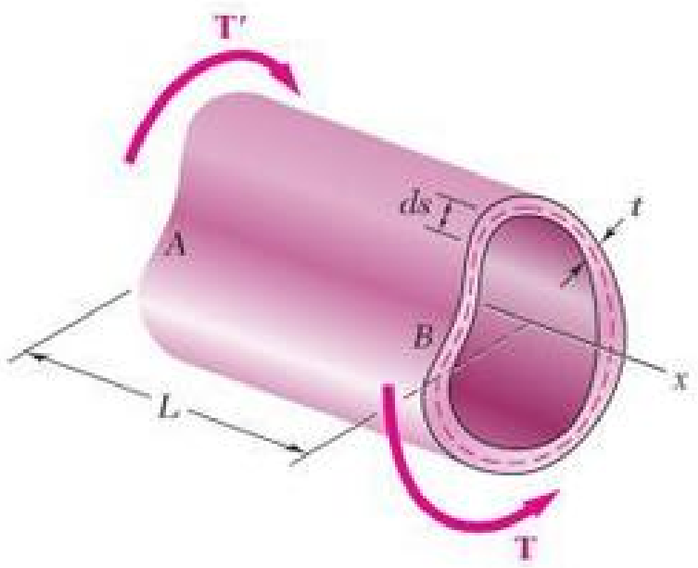


Fig. P11.70

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

EXEMPLO 11.13

A viga em balanço AB suporta uma força w uniformemente distribuída (Fig. 11.44). Determine a deflexão e a inclinação em A.

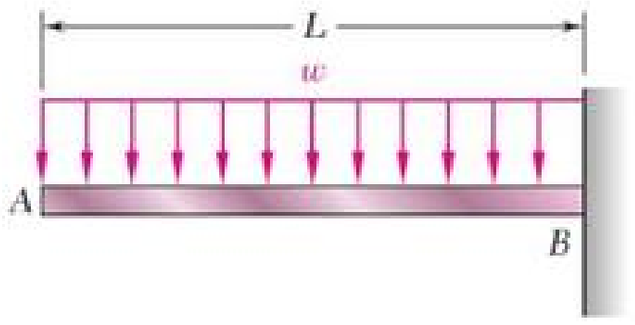


Fig. 11.44

Deflexão em A. Aplicamos uma força fictícia para baixo Q_A em A (Fig. 11.45) e escrevemos

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}\,dx \tag{11.77}$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -Q_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{11.78}$$

e sua derivada em relação a Q_A é

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \tag{11.79}$$

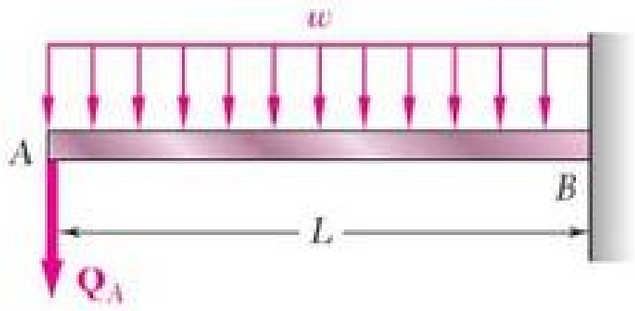


Fig. 11.45

Usando M e $\partial M/\partial Q_A$ de (11.78) e (11.79) na (11.77) e fazendo $Q_A = 0$, obtemos a deflexão em A para o carregamento dado:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-x)\,dx = +\frac{wL^4}{8EI}$$

Como a força fictícia foi direcionada para baixo, o sinal positivo indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

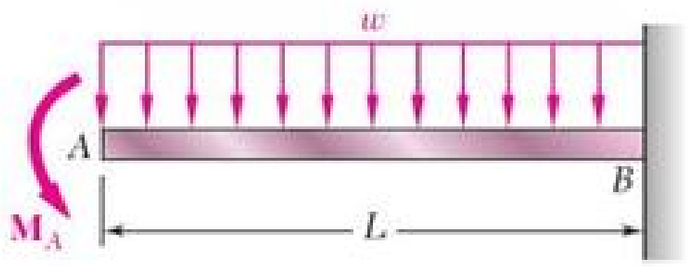


Fig. 11.46

Inclinação em A. Aplicamos um momento fictício $\mathbf{M}_A$ no sentido anti-horário em A (Fig. 11.46) e escrevemos

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Usando a Equação (11.17), temos

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx \tag{11.80}$$

O momento fletor M a uma distância x de A é

$$M = -M_A - \tfrac{1}{2}wx^2 \tag{11.81}$$

e sua derivada em relação a M_A é

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \tag{11.82}$$

Usando M e $\partial M/\partial M_A$ de (11.81) e (11.82) na (11.80) e fazendo $M_A = 0$, obtemos a inclinação em A para o carregamento dado:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-1)\,dx = +\frac{wL^3}{6EI}$$

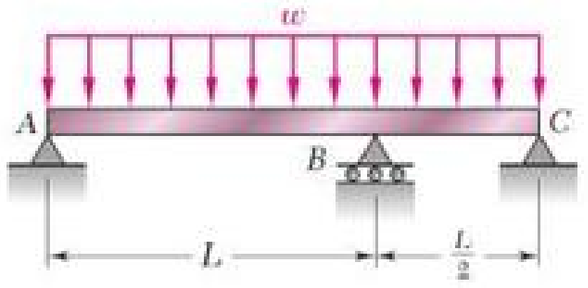
Como o momento fictício tinha o sentido anti-horário, o sinal positivo indica que o ângulo θ_A também é anti-horário:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI}\measuredangle$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

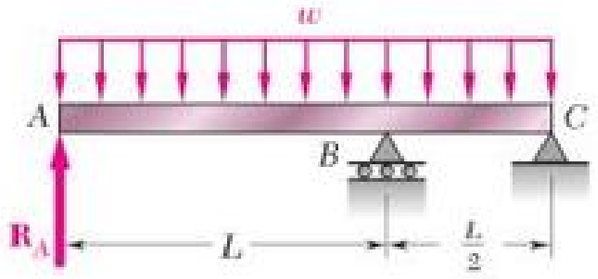
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



PROBLEMA RESOLVIDO 11.7

Para a viga uniforme e carregamento mostrados, determine as reações nos apoios.



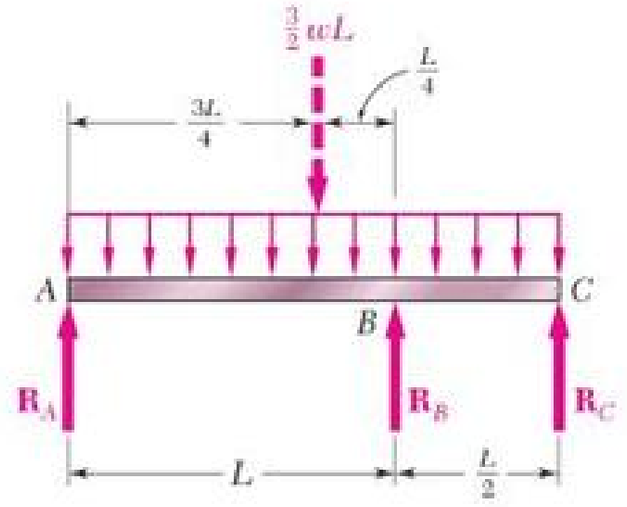
SOLUÇÃO

Teorema de Castigliano. A viga é indeterminada com um grau de indeterminação e escolhemos a reação $\mathbf{R}_A$ como redundante. Usando o teorema de Castigliano, determinamos a deflexão em A provocada pela ação combinada de $\mathbf{R}_A$ e à força distribuída. Como EI é constante, escrevemos

$$y_A = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial R_A}\right) dx = \frac{1}{EI}\int M\,\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \tag{1}$$

A integração será feita separadamente para as partes AB e BC da viga. Finalmente, $\mathbf{R}_A$ é obtida fazendo-se y_A igual a zero.

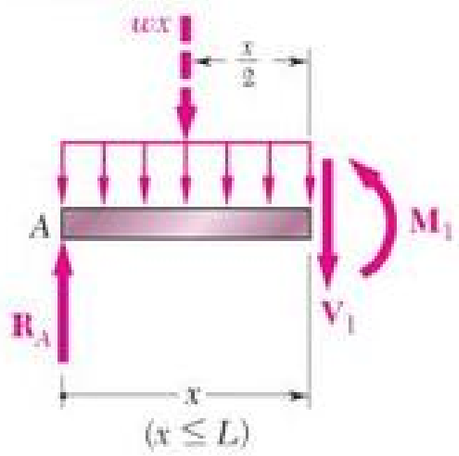
Diagrama de corpo livre: viga inteira. Expressamos as reações em B e C em termos de R_A e da força distribuída



$$R_B = \tfrac{9}{4}wL - 3R_A \qquad R_C = 2R_A - \tfrac{3}{4}wL \tag{2}$$

Parte* AB *da viga. Usando o diagrama de corpo livre mostrado, encontramos

De A até B



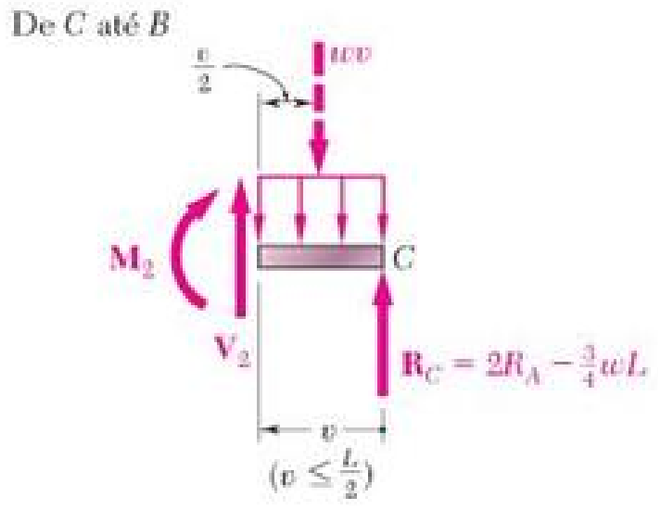
$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

Substituindo na Equação (1) e integrando de A até B, temos

$$\frac{1}{EI}\int M_1\,\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{wx^3}{2}\right) dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \tag{3}$$

Parte* BC *da viga. Temos

De C até B



$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4}wL\right)v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Substituindo na Equação (1) e integrando de C, em que $v = 0$, até B, em que $v = \frac{1}{2}L$, temos

$$\frac{1}{EI}\int M_2\,\frac{\partial M_2}{\partial R_A}\,dv = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(4R_A v^2 - \frac{3}{2}wLv^2 - wv^3\right) dv$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) \tag{4}$$

***Reação em* A.** Somando as expressões obtidas em (3) e (4), determinamos y_A e consideramos seu valor igual a zero

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) = 0$$

Resolvendo para R_A,

$$R_A = \frac{13}{32}wL \qquad R_A = \frac{13}{32}wL\uparrow \blacktriangleleft$$

***Reações em* B *e* C.** Substituindo R_A nas Equações (2), obtemos

$$R_B = \frac{33}{32}wL\uparrow \qquad R_C = \frac{wL}{16}\uparrow \blacktriangleleft$$

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

11.115 Determine a reação no apoio móvel e trace o diagrama do momento fletor para a viga e carregamento mostrados.

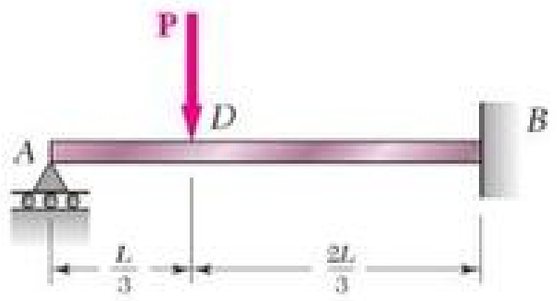


Fig. *P11.115*

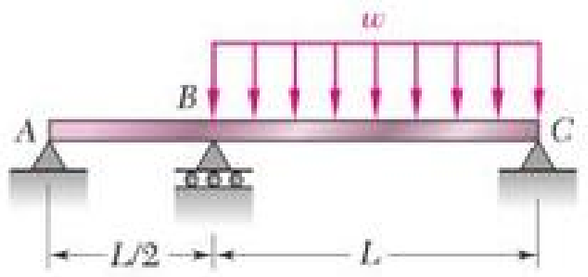


Fig. P11.116

11.116 Para a viga de seção uniforme e carregamento mostrados, determine a reação em cada apoio.

11.117 até 11.120 Três barras do mesmo material e mesma área de seção transversal são usadas para suportar a força **P**. Determine o esforço na barra *BC*.

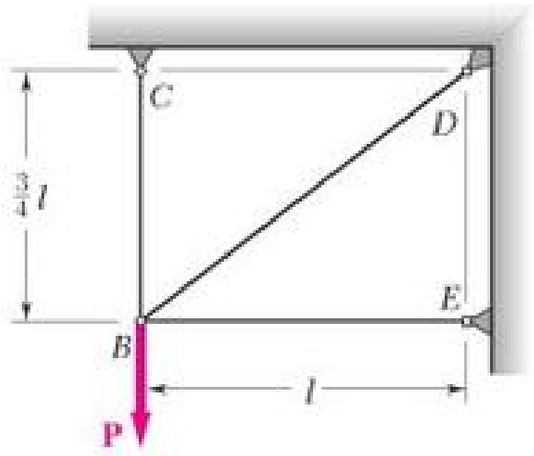


Fig. P11.117

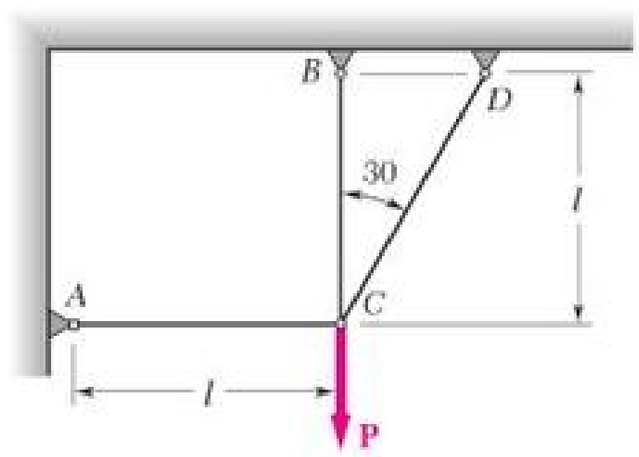


Fig. P11.118

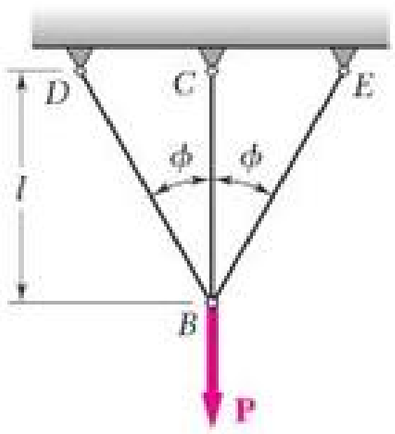


Fig. P11.119

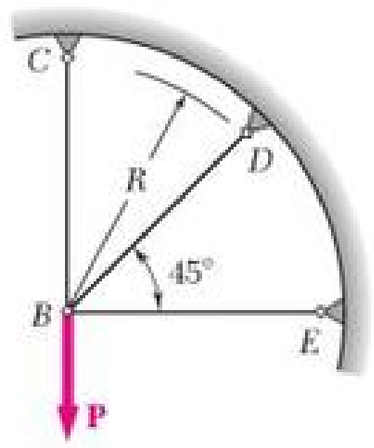


Fig. *P11.120*

11.121 e 11.122 Sabendo que as oito barras da treliça indeterminada mostradas nas figuras têm a mesma área de seção transversal, determine o esforço na barra *AB*.

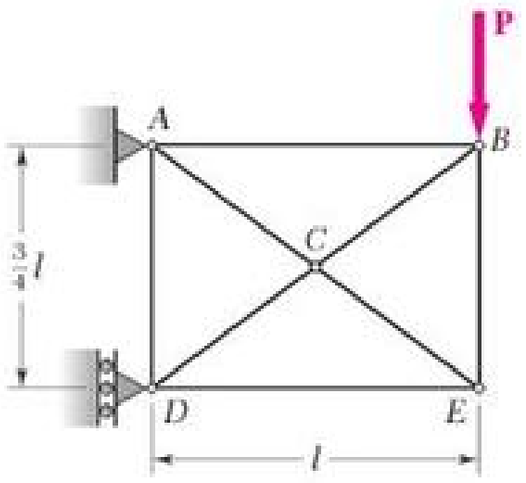


Fig. P11.121

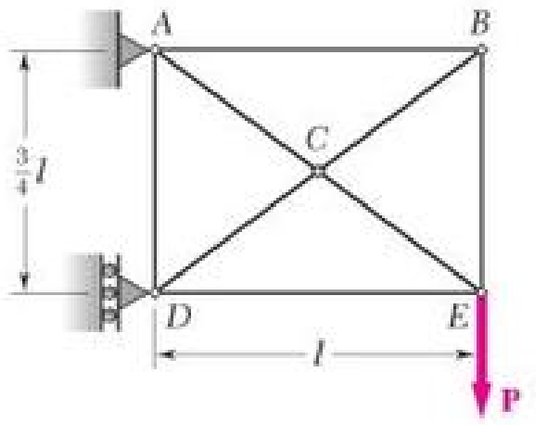


Fig. P11.122

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

11.128 Um bloco de peso W é colocado em contato com uma viga em um certo ponto D e liberado. Mostre que a deflexão máxima resultante no ponto D é duas vezes maior do que a deflexão provocada por uma força estática W aplicada em D.

11.129 A barra de aço ABC de 12 mm de diâmetro foi dobrada na forma mostrada na figura. Sabendo que $E = 200$ GPa e $G = 77{,}2$ GPa, determine a deflexão da extremidade C provocada pela força de 150 N.

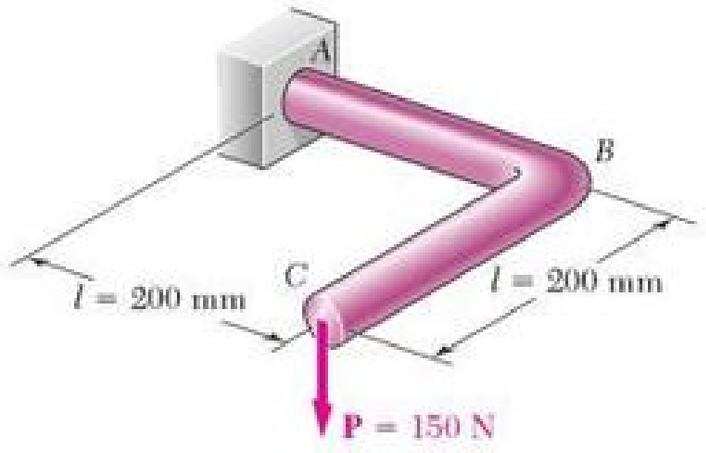


Fig. P11.129

11.130 A barra de aço ABC tem seção transversal quadrada com 19,05 mm de lado e é submetida a uma carga P de 222,4 kN. Usando $E = 200$GPa, determine a deflexão no ponto C.

11.131 As barras de treliça mostradas na figura são feitas de aço; a área da seção transversal da barra BC é de 800 mm^2 e, para todas as outras barras, a área da seção transversal é de 400 mm^2. Usando $E = 200$ GPa, determine o deslocamento do ponto D provocada pela força de 60 kN.

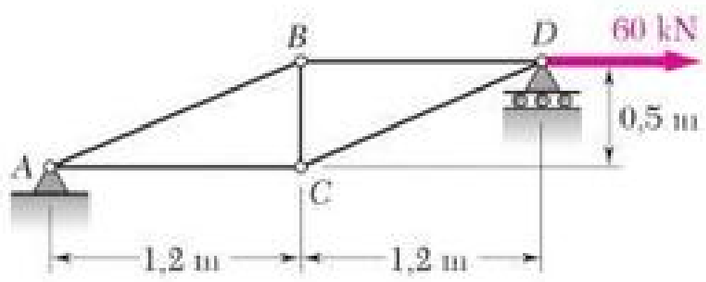


Fig. P11.131

11.132 Um disco de raio a foi soldado à extremidade B do eixo de aço de seção cheia AB. Um cabo é enrolado ao redor do disco e uma força vertical **P** é aplicada à extremidade C do cabo. Sabendo que o raio do eixo é r e desprezando as deformações do disco e do cabo, mostre que a deflexão do ponto C provocada pela aplicação de **P** é

$$\delta_C = \frac{PL^2}{3EI}\left(1 + 1{,}5\,\frac{Er^2}{GL^2}\right)$$

11.133 Para a viga prismática mostrada, determine a deflexão do ponto D.

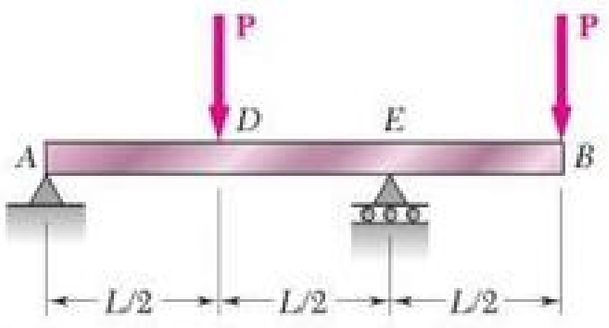


Fig. *P11.133*

11.134 Três barras, cada uma delas com rigidez à flexão EI, são soldadas para formar o pórtico $ABCD$. Para o carregamento mostrado, determine o ângulo formado no ponto D.

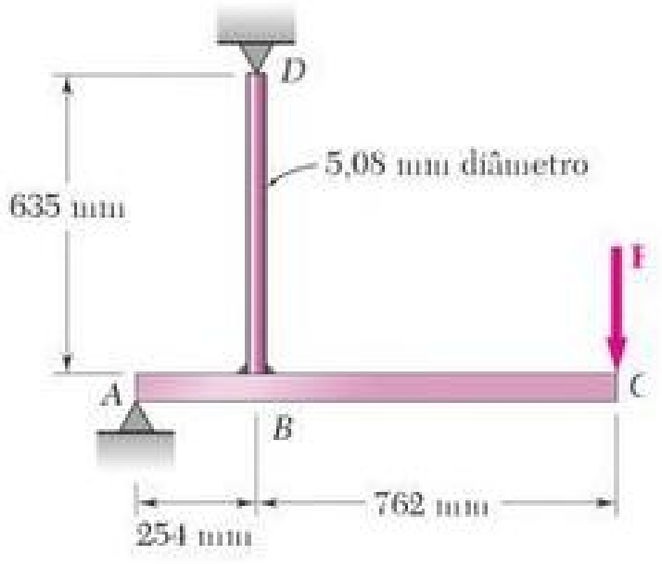


Fig. *P11.130*

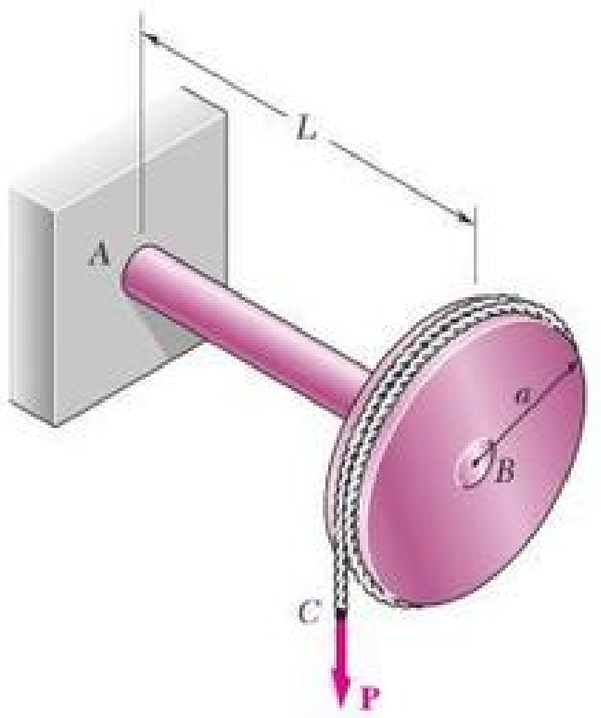


Fig. P11.132

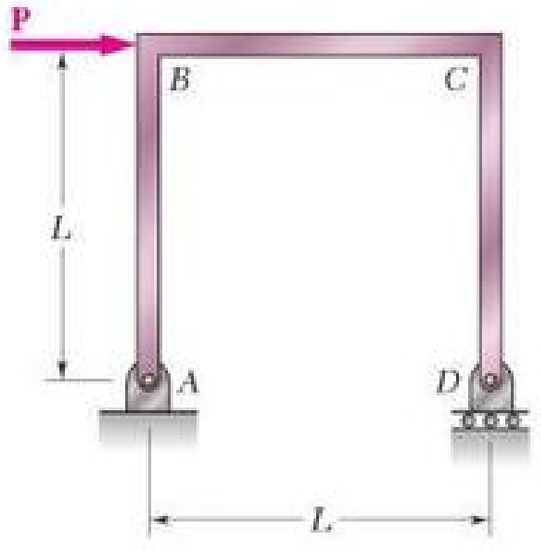


Fig. P11.134

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

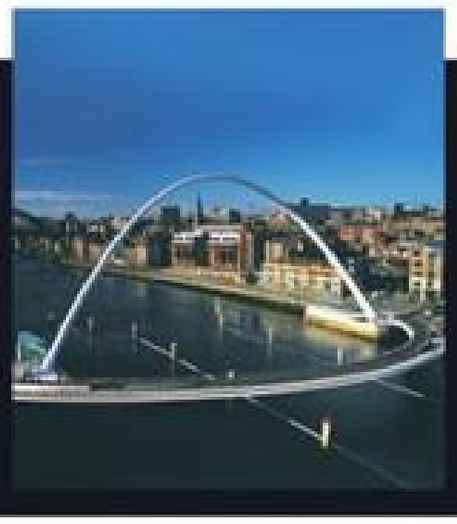
You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.

You have either reached a page that is unavailable for viewing or reached your viewing limit for this book.



MECÂNICA DOS MATERIAIS

Ferdinand P. Beer / E. Russel Johnston, Jr. / John T. DeWolf / David F. Mazurek

QUINTA EDIÇÃO

Esta nova edição de *Mecânica dos Materiais* confirma o padrão de excelência desenvolvido pelos autores nas versões anteriores do livro. Utilizada por milhares de estudantes ao redor do mundo desde a sua primeira publicação, em 1981, a obra de Beer, Johnston, DeWolf e Mazurek é o clássico definitivo para o ensino e a aprendizagem da mecânica dos sólidos.

O estudo do tema está aqui fundamentado na explicação precisa de conceitos básicos e no uso de modelos simplificados. Exemplos detalhados e diversos exercícios completam essa abordagem, que permite desenvolver fórmulas de uma maneira racional e lógica e indicar as condições sob as quais elas podem ser aplicadas com segurança na análise e no projeto das estruturas reais de engenharia e componentes de máquinas.

Este livro é leitura obrigatória e indispensável nas disciplinas de mecânica dos materiais, mecânica dos sólidos ou ainda resistência dos materiais, parte do currículo dos cursos de engenharia nos dois primeiros anos da graduação.

Visite a Área do Professor no site www.bookman.com.br para acessar material exclusivo (em inglês) deste livro.

ENGENHARIAS

ISBN 978-85-8055-008-5

grupo a

Conhecimento que transforma.

Mc Graw Hill

bookman